ГИДРОГРАФИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЕННО-МОРСКИХ СИЛ

СПРАВОЧНИК ШТУРМАНА

ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск 2

ПРАКТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Издательство Гидрографического Управления ВМС
1951

ГИДРОГРАФИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЕННО-МОРСКИХ СИЛ

СПРАВОЧНИК ШТУРМАНА

ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск 2

ПРАКТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Издательство Гидрографического Управления ВМС
1951

ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочник штурмана по математике содержит формулы из различных областей математики, могущие найти применение в штурманской практике.

Приводимые формулы снабжены краткими пояснениями и примерами их практического использования.

Первый выпуск Справочника, изданный в 1948 г., включает формулы элементарной и высшей математики.

В настоящем, втором, выпуске Справочника собраны формулы практической математики — теории ошибок, способа наименьших квадратов, приближенных вычислений, интерполирования и номографии.

Второй выпуск Справочника составлен профессором Н. Н. Матусевичем и отредактирован профессором А. П. Ющенко.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Следует читать*
29	4 снизу	линейнах	линейных
51	Рис. 26	$h_2 = 4\,2$ *см*	$h_2 = 4{,}2$ *см*
51	Рис. 26	$g_1' = 5{,}0$ *см*	$g_1 = 5{,}0$ *см*
115	1 формула снизу	$= \frac{Df_2^2(\alpha_2)}{1 + f_2^2(\alpha_2)}$	$y_2 = \frac{Df_2^2(\alpha_2)}{1 + f_2^2(\alpha_2)}$
125	Рис. 61, вторая точка на оси OX	O	O_1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отдел III. Практическая математика

	Стр.
Глава 1. Теория ошибок наблюдений и способ наименьших квадратов . .	5
Глава 2. Теория ошибок на плоскости	25
Глава 3. Приближенные вычисления. Интерполирование	63
Глава 4. Номография	85

ОТДЕЛ III

ПРАКТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Глава 1

ТЕОРИЯ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ И СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ 1. Ошибки наблюдений. Систематические и случайные ошибки. Основные свойства случайных ошибок 7
§ 2. Прямые измерения (определения) одной неизвестной 9
§ 3. Ошибки выводов 11
§ 4. Косвенное определение нескольких неизвестных 13
§ 5. Определение коэффициентов периодических рядов 17
§ 6. Определение вероятнейших значений неизвестных, связанных условиями 19

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Н. Н. Матусевич, Учение об ошибках наблюдений и способ наименьших квадратов, изд. В.-М. Академии РККФ, 1926.

А. С. Чеботарев, Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, М.—Л., 1936.

В. Иордан, Руководство по геодезии, т. I, Москва, 1939.

П. И. Шилов, Способ наименьших квадратов, Москва, 1941.

§ 1. Ошибки наблюдений. Систематические и случайные ошибки. Основные свойства случайных ошибок

При всяких измерениях и наблюдениях, как бы тщательно их ни выполнять, неизбежны погрешности, которые искажают выводы, а потому исследование влияния разного рода погрешностей измерений существенно важно для верных умозаключений.

Теорию ошибок наблюдений часто называют „теорией наблюдений", так как исследование получаемых ошибок и погрешностей нередко дает указания, как следует располагать процесс наблюдений, чтобы получить результаты наиболее достоверные.

Ошибки наблюдений происходят: 1) от несовершенства инструментов, 2) от способа производства измерений, 3) от влияния внешней среды или обстановки, в которой протекает процесс измерений, 4) от несовершенства чувств и восприятий наблюдателя.

Но независимо от признака происхождения, и существеннее для последующего рассмотрения вопроса, ошибки наблюдений разделять на два различных по характеру класса: 1) *ошибки систематические*, а в частном случае *постоянные*, и 2) *ошибки случайные*.

Под систематическими ошибками мы условимся понимать такие, необходимый результат которых при данных условиях наблюдения может быть заранее предсказан, если их причины достаточно изучены. Поэтому результаты измерений могут быть или освобождены от влияния ошибок этого рода, или же эти ошибки могут быть приняты во внимание при последующей обработке наблюдений.

Наоборот, результат действия случайных причин не может быть заранее предсказан в каждом отдельном случае, и ошибки, вызываемые причинами этого рода, называют *случайными*.

Во всем последующем предполагается, что речь идет только о случайных ошибках наблюдений, которые объективно неизбежны, и что систематические или постоянные ошибки заранее исследованы и непосредственные результаты наблюдений исправлены за их влияние.

Приведем примеры ошибок разного рода.

Если стальная 20-метровая лента (или какой-нибудь мерный прибор) короче или длиннее указанной длины на малую величину a, то измеренная длина L вследствие этой причины будет содержать ошибку $a\left(\frac{L}{20}\right)$. Действие этой причины, понятно, будет систематически влиять на результат измерений, искажая его всегда в одном и том же направлении (смысле).

Ошибка в принятом табличном наклонении горизонта будет действовать единообразно, одинаково увеличивая или уменьшая каждую

из всей серии исправленных высот светил, измеренных в быстрой последовательности одна за другой.

Наличие случайных ошибок наблюдений легче всего обнаружить, если один и тот же наблюдатель будет измерять несколько раз при одинаковых условиях одним и тем же инструментом какую-либо неизменяющуюся величину, например угол между двумя земными неподвижными предметами. Здесь сейчас же и обнаружится, что каждый новый результат измерений приводит к величине, отличной от каждой из предыдущих, хотя и весьма близкой.

Основные свойства случайных ошибок будут указаны ниже. Если измеряют какую-нибудь изменяющуюся величину, то наличия случайных ошибок не видно непосредственно из чисел, даваемых наблюдениями. В таких случаях применяют особые методы обработки, при которых действие случайных ошибок оставалось бы единственным фактором, влияющим на получаемые результаты.

Например, если в быстрой последовательности измерить ряд высот Солнца над видимым морским горизонтом и при каждой высоте заметить время по часам, то, вычислив для каждого наблюдения высоту по формуле $\sin h$ для координат пункта наблюдений, можно заметить, что разности „наблюденная" — „вычисленная" не остаются строго постоянными; колебания в величине указанных разностей и должны быть объяснены случайными ошибками измерения каждой высоты в отдельности.

Надо твердо помнить, что случайные ошибки наблюдений неизбежны при всяком процессе измерений. Они могут быть меньше при более совершенных инструментах, но никогда нельзя совершенно избавиться от их влияния. Таким образом, влиянию случайных ошибок наблюдений подвержен всякий результат, полученный из опыта или измерения, и задача наблюдателя состоит в том, чтобы влияние таких ошибок довести до возможного минимума.

Теория ошибок наблюдений построена на предположении, что результаты измерений свободны от грубых промахов, а влияние систематических ошибок принято во внимание, т. е. непосредственные результаты наблюдений исправлены за влияние ошибок этой категории.

Следует иметь в виду, что не всегда систематические ошибки могут быть настолько изучены, что в последующем влияние их может быть полностью устранено. Поэтому получаемые на практике результаты наблюдений иногда заключают в себе влияние и случайных ошибок, и систематических. В этом случае последнее обстоятельство препятствует получению правильных выводов и верных результатов и заставляет осторожно делать заключения.

Внешними признаками преобладания систематических ошибок является правильный ход получаемых результатов при переходе от одного наблюдения к другому.

Наоборот, если влияние систематических ошибок устранено полностью или ослаблено в большей степени, то в ряду наблюдений преобладающим фактором будут случайные ошибки. Тогда при переходе от одного наблюдения к другому нельзя обнаружить какой-либо правильности или закономерного изменения в самой измеряемой величине. Из огромного опыта астрономических и геодезических наблюдений установлены следующие свойства случайных ошибок, каковые и служат основанием для создания стройной теории, трактующей об ошибках измерений и выводе наиболее достоверных результатов из наблюдений.

1. Для данных условий наблюдений случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине некоторого определенного предела.

2. Малые по абсолютной величине ошибки появляются чаще больших.

3. Положительные ошибки появляются так же часто, как равные им отрицательные (в среднем при большом числе наблюдений).

Эти свойства ошибок наблюдений, как сказано, выведены из опыта. Из последнего свойства вытекает, что среднее арифметическое из случайных ошибок равноточных измерений одной и той же величины стремится к нулю с увеличением числа измерений.

§ 2. Прямые измерения (определения) одной неизвестной

1. Если

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots,\ l_n \tag{1}$$

представляют собой результаты равноточных и независимых измерений или определений какой-нибудь величины, то вероятнейшее значение ее будет арифметическое среднее из всех результатов, т. е.

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}. \tag{2}$$

Примечание. Символ $[l]$ означает сумму $\Sigma\, l_i = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n$. В равной степени символ $[ab]$ означает сумму произведений величин $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$.

2. Для оценки точности наблюдений служит средняя квадратическая ошибка ε отдельного наблюдения данного ряда, определяемая по формуле

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \tag{3}$$

$$v_i = x - l_i\,(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \tag{3}^*$$

или

$$x = l_i + v_i, \tag{3}^{**}$$

где x — среднее арифметическое из n равноблагонадежных измерений той же самой величины, представляемых рядом (1).

Величины v_i определяются алгебраически по (3)*.

3. Символ v означает „поправку“ или „улучшение“. Смысл этого определения заключается в том, что если к различным наблюдаемым величинам $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ придать поправки $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, то, как видно из (3)**, получается для искомого значения измеряемой величины одно определяемое значение, именно равное среднему арифметическому из ряда (1). Эта величина является вероятнейшим значением определяемого неизвестного x, а потому величины v_i представляют собой вероятнейшие значения поправок.

Они обладают важным свойством: сумма квадратов их $[vv]$ — наименьшая из возможных. Способ определения неизвестных, получаемых из наблюдений под условием $\Sigma v^2 =$ минимум, называется способом наименьших квадратов.

4. Средняя квадратическая ошибка E арифметического среднего x из наблюдений ряда (1) будет равна

$$E = \frac{\pm\,\varepsilon}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

где ε — средняя ошибка отдельного наблюдения ряда (1).

5. Если можно сравнивать результаты измерений (1) с точно известной величиной A измеряемого количества, то истинные ошибки наблюдений Δ получаются как разности

$$\Delta_i = A - l_i; \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

тогда

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{5}$$

Это равенство является определением среднего квадратического значения величины Δ_i и при $n \to \infty$ будет вместе с тем определением средней квадратической ошибки одного измерения данной точности.

6. Если наблюдения дают неравноточные величины и достоинство каждого наблюдения (1) определяется в е с о м p_i, то вероятнейшее значение измеряемой величины, так называемое *весовое среднее*, находят по формуле

$$x = \frac{l_1 p_1 + l_2 p_2 + \ldots + l_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[lp]}{[p]}. \tag{6}$$

7. Средняя ошибка ε_0 воображаемого или реального наблюдения, которому приписывают вес, равный 1, определяется по формуле

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}. \tag{7}$$

8. Средняя квадратическая ошибка E весового среднего равна

$$\mathrm{E} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{[p]}}. \tag{7}^*$$

9. Вес наблюдения определяет степень доверия к найденной величине. Численно вес обратно пропорционален квадрату средней квадратической ошибки, т. е.

$$p = \frac{k}{\varepsilon^2}; \tag{8}$$

постоянную k выбирают так, чтобы получить числа для весов, удобные в обращении. Вес p_i пропорционален числу воображаемых равноточных наблюдений, среднее арифметическое которых имеет ту же точность, как одно данное измерений l_i.

10. Вероятность средней ошибки одной величины, найденной из непосредственных наблюдений, равна 0,68 или, приближенно, $^2/_3$. Это надо понимать так: если из наблюдений получена некоторая величина x со средней ошибкой ε, то вероятность того, что действительное значение этой величины не выйдет из пределов $x - \varepsilon$ и $x + \varepsilon$, равна 0,68. Вероятность обратного заключения, т. е. того, что действительное значение искомой величины выйдет из указанного выше предела, все-таки еще довольно значительна и равна 0,32, или почти $^1/_3$.

11. Предельная ошибка $D = \Delta_{\lim}$ принимается равной утроенной средней квадратической, т. е.

$$D = \pm 3\varepsilon. \tag{9}$$

Ошибки выше этого предела обычно, но не строго обоснованно, относят к промахам. Надо иметь в виду, что вероятность ошибки, большей D, равна все-таки не нулю, а 0,003.

12. Вероятная или, лучше сказать, срединная ошибка r равна почти $^2/_3$ средней квадратической или, точнее,

$$r = \pm 0{,}6745\,\varepsilon. \tag{10}$$

Срединная ошибка имеет вероятность, равную $^1/_2$, т. е. одна половина из общего числа ошибок меньше r, а другая половина больше r. В артиллерии обычно применяют вероятную ошибку, называя ее срединной ошибкой, найдя предварительно среднюю квадратическую по одной из формул (3) или (5) в зависимости от обстоятельств.

§ 3. Ошибки выводов

1. Если

$$X = kx, \tag{1}$$

где x — получено из наблюдений со средней ошибкой ε, а
k — число, от ошибок наблюдений не зависящее,
то средняя ошибка E_X вывода X равна

$$E_X = \pm k\varepsilon. \tag{1}^*$$

2. Средняя квадратическая ошибка суммы или разности двух величин, найденных из независимых между собой наблюдений. Если

$$X = x \pm y, \tag{2}$$

то

$$E_X = \pm\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}. \tag{2}^*$$

Здесь ε_x и ε_y — средние квадратические ошибки величин x и y, полученных из независимых измерений или определений.

Важное замечание. Формула (2)* применима не только в том случае, когда алгебраически складывают две независимые величины, но также и тогда, когда две независимые причины действуют совместно и каждая вызывает поэтому независимые ошибки ε_x и ε_y.

Независимыми считают величины, обладающие тем свойством, что изменение одной из них не может изменить нашего суждения о величинах других.

3. Если $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$, то средняя ошибка суммы или разности равноточных величин

$$Y = x \pm y \tag{3}$$

равна

$$E = \varepsilon\sqrt{2}. \tag{3}^*$$

4. Если функция

$$Y = x \pm y \pm z, \tag{4}$$

то средняя ошибка вывода E_Y равна

$$E_Y = \pm\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \tag{4}^*$$

Приведенное выше замечание относительно формулы (2)* применимо и здесь.

5. Если

$$Y = ax \pm by \pm cz \pm \ldots \pm lt, \tag{5}$$

где $a, b, c, \ldots, l$ — коэффициенты, ошибок наблюдений не заключающие, то средняя квадратическая ошибка E_Y величины Y определяется формулой

$$E_Y = \pm\sqrt{a^2\varepsilon_x^2 + b^2\varepsilon_y^2 + c^2\varepsilon_z^2 + \ldots + l^2\varepsilon_t^2}. \tag{5}^*$$

Эта формула дает общее правило отыскания средней квадратической *ошибки линейной функции измеренных независимых величин.*

6. Если $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_t = \varepsilon$, а коэффициенты $a = b = c \ldots = 1$, то средняя ошибка E суммы n независимых величин

$$Y = x \pm y \pm z \pm \ldots \pm t \tag{6}$$

равна

$$\mathrm{E} = \pm \varepsilon \sqrt{n}, \tag{6}^*$$

т. е. средняя квадратическая ошибка алгебраической суммы n равноточных независимых величин равна средней ошибке ε любой из указанных величин, умноженной на корень квадратный из числа слагаемых.

Таким образом, ошибки таких выводов нарастают медленнее числа слагаемых.

7. Случай функции общего вида. Имеем:

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{7}$$

где независимые величины $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ получены из наблюдений со своими средними ошибками $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$.

Тогда средняя квадратическая ошибка E_y вывода Y равна

$$\mathrm{E}_Y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \varepsilon_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \varepsilon_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \varepsilon_3^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \varepsilon_n^2. \tag{7}^*$$

Случайные ошибки величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ должны быть независимы между собой.

8. Для определения средней квадратической ошибки непосредственных наблюдений вместо формулы (3), требующей возвышения в квадрат большого числа величин v_i, можно пользоваться формулой

$$\varepsilon = \frac{1{,}2533\,[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{1.2533\,[|v|]}{n - \frac{1}{2}}, \tag{8}$$

здесь $[|v|]$ представляет собой сумму абсолютных значений величин v_i. При очень большом числе наблюдений n можно пренебречь $\frac{1}{2}$ в знаменателе.

9. Определение средней квадратической ошибки по разностям d двойных измерений

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}. \tag{9}$$

Здесь n — число двойных измерений, следовательно, $2n$ — число всех операций. Если двойные измерения имеют разные веса, то средняя ошибка ε_0 измерения с весом, равным 1, найдется по формуле

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}. \tag{9}^*$$

10. Зависимость между предельной ошибкой α округления и средней квадратической ошибкой округления выражается формулой

$$\varepsilon = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \tag{10}$$

где α — предельная ошибка округления.

Например, если $\alpha = \pm 0{,}5$ единицы последнего знака в мантиссах обыкновенных логарифмов, ε — средняя квадратическая ошибка, тогда

$$\varepsilon = \pm \frac{0.5}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}29, \tag{10}^*$$

т. е. средняя квадратическая ошибка табличных логарифмов будет величина, приблизительно равная $\pm 0{,}3$ единицы последнего знака.

В способе наименьших квадратов удобно рассматривать четыре отдельные части сообразно характеру задач, решаемых в каждой из них.

Первая часть излагает приемы определения вероятнейшего значения одной искомой, получаемой из прямых или непосредственных измерений этой величины, и рассматривает теорию ошибок определения одной или нескольких величин, определяемых каждая из независимых измерений.

Вторая часть трактует о способах определения вероятнейших значений искомых неизвестных косвенным путем, решением некоторых уравнений, связывающих эти неизвестные с непосредственно измеренными величинами, и нахождением средних ошибок этих неизвестных.

Третья часть изучает вопросы определения вероятнейших значений нескольких неизвестных, которые должны строго удовлетворять некоторым условиям и вытекающим из них условным уравнениям.

Четвертая часть занимается теорией ошибок векториальных величин и, в частности, теорией ошибок определения положения точки на плоскости или в пространстве. Эта теория имеет некоторые особенности, потому что приемы, развитые в первой части, непосредственно здесь неприложимы.

§ 4. Косвенное определение нескольких неизвестных

Иногда неизвестные $x_1, x_2, x_3 \ldots$ определяют косвенным путем из линейных уравнений вида

$$a_i x_1 + b_i x_3 + c_i x_2 + \ldots = l_i, \tag{1}$$

где из наблюдений получают величины l_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), а коэффициенты a_i, b_i, $c_i \ldots$ — некоторые числа, ошибок наблюдений не заключающие.

Число наблюдений n больше числа неизвестных, которое для простоты мы ограничим тремя.

Таким образом, имеем *n уравнений наблюдений*:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= l_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= l_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 &= l_n \end{aligned}\right\} \tag{1}^*$$

Вследствие ошибок наблюдений, которые заключаются в числах l_1, l_2, l_3, $\ldots$ l_n, эта система уравнений несовместна, т. е. не может быть удовлетворена тождественно какой-нибудь системой решений x_1, x_2 и x_3. К наблюденным величинам l_1, l_2, l_3, $\ldots$, l_n надо поэтому прибавить некоторые поправки v_1, v_2, v_3, $\ldots$, v_n, чтобы обратить систему (1)* в совместную. Тогда получим так называемые *уравнения ошибок*, которые отличаются от уравнений наблюдений только тем, что в правых частях добавлены некоторые неизвестные пока величины v_1, v_2, v_3, $\ldots$, v_n, т. е. будем иметь

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= l_1 + v_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= l_2 + v_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= l_3 + v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 &= l_n + v_n \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Теория показывает, что из множества возможных определений величин v_1, v_2, v_3, . . . , v_n к наиболее вероятным значениям искомых неизвестных x_1, x_2, x_3 приводит такая система поправок v_1, v_2, v_3, . . . , v_n, которая удовлетворяет условию, что сумма квадратов этих поправок будет наименьшей из возможных, т. е.

$$F = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n = \text{минимум}. \tag{3}$$

Если наблюдения имеют разные веса p_i, т. е. числа l_1, l_2, l_3, . . . , l_n подлежат разным ошибкам наблюдений, то должно быть

$$F_1 = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + p_3v_3^2 + \ldots + p_nv_n^2 = \text{минимум}. \tag{4}$$

Величины v_1, v_2, v_3, . . . , v_n, найденные из таких условий, суть *вероятнейшие поправки* к наблюденным величинам l_1, l_2, l_3, . . . , l_n. А получаемые решением уравнений (1)* неизвестные x_1, x_2, x_3 будут вероятнейшие значения, соответствующие данным условиям наблюдений.

Для приведения уравнений (1) или (1)* к системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными, умножаем все уравнения (1)* сначала на коэффициенты при первой неизвестной x_1, т. е. первое уравнение на a_1, второе на a_2, третье на a_3 и т. д., и складываем. Потом умножаем все уравнения на коэффициенты при второй неизвестной x_2 и складываем их и, наконец, умножаем все уравнения на коэффициенты при третьей неизвестной x_3 и снова складываем. Тогда получим систему уравнений, число которых равно числу неизвестных x_1, x_2 и x_3:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x_1 + [ab]\,x_2 + [ac]\,x_3 &= [al] \\ [ab]\,x_1 + [bb]\,x_2 + [bc]\,x_3 &= [bl] \\ [ac]\,x_1 + [bc]\,x_2 + [cc]\,x_3 &= [cl] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

называемую системой *нормальных уравнений*.

Решением этой системы и определяются искомые вероятнейшие значения неизвестных x_1, x_2 и x_3, а в общем случае x_1, x_2, x_3, . . . , x_n. Коэффициенты $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$ . . . и свободные числа $[al]$, $[bl]$ и $[cl]$ составляют из коэффициентов уравнений (1)*, как сказано выше, путем таких вычислений:

$$\left.\begin{aligned} [aa] &= a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + \ldots + a_na_n \\ [ab] &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n \\ [ac] &= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots + a_nc_n \\ [bb] &= b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3 + \ldots + b_nb_n \\ [bc] &= b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \ldots + b_nc_n \\ [cc] &= c_1c_1 + c_2c_2 + c_3c_3 + \ldots + c_nc_n \end{aligned}\right\} \text{коэффициенты}$$

$$\left.\begin{aligned} [al] &= a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + \ldots + a_nl_n \\ [bl] &= b_1l_1 + b_2l_2 + b_3l_3 + \ldots + b_nl_n \\ [cl] &= c_1l_1 + c_2l_2 + c_3l_3 + \ldots + c_nl_n \end{aligned}\right\} \text{свободные члены} \tag{6}$$

Для таких вычислений удобно составить таблицу коэффициентов уравнений наблюдений (1)* в таком виде:

Таблица 1

№ уравнений	a_i	b_i	c_i	l_i	s_i
1	a_1	b_1	c_1	l_1	s_1
2	a_2	b_2	c_2	l_2	s_2
3	a_3	b_3	c_3	l_3	s_3
4	a_4	b_4	c_4	l_4	s_4
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	a_n	b_n	c_n	l_n	s_n

Прежде всего, выписав все коэффициенты a_i, b_i, c_i и свободные члены l_i, составляют контрольные суммы s_i, складывая по горизонтальному направлению числа в каждой строчке, т. е.

$$s_i = a_i + b_i + c_i + l_i. \tag{7}$$

На полоске бумаги с правого края переписывают вертикально коэффициенты a_1, a_2, a_3, . . . , a_n, прикладывают ее к столбцу a_i табл. 1 и перемножают числа, стоящие рядом в одной строчке; произведения записывают в столбец aa табл. 2. Передвинув бумажку к столбцу b_i табл. 1, перемножают числа a_i на b_i, записывают произведения в столбец ab табл. 2 и поступают тем же приемом далее, пока не заполнят столбец as табл. 2. Складывая по вертикальному направлению числа столбцов табл. 2, получают коэффициенты $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$ и свободный член $[al]$ первого нормального уравнения (5). Контролем верности всех вычислений будет служить необходимое соотношение

$$[aa] + [ab] + [ac] + [al] = [as]. \tag{8}$$

Таблица 2

	aa	ab	ac	al	as
1	a_1a_1	a_1b_1	a_1c_1	a_1l_1	a_1s_1
2	a_2a_2	a_2b_2	a_2c_2	a_2l_2	a_2s_2
3	a_3a_3	a_3b_3	a_3c_3	a_3l_2	a_3s_3
4	a_4a_4	a_4b_4	a_4c_4	a_4l_4	a_4s_4
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	a_na_n	a_nb_n	a_nc_n	a_nl_n	a_ns_n
Суммы	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$

Переписав на полоску бумаги по вертикальному направлению числа b_1, b_2, b_3, . . . , b_n — коэффициенты при втором неизвестном в уравнениях наблюдений (1)*, составляют произведения b_1b_1, b_1c_1, b_1l_1 и b_1s_1 и тем же приемом вычисляют коэффициенты $[bb]$, $[bc]$, $[bl]$ и контрольную сумму $[bs]$, которая удостоверяет правильность составления коэффициентов второго нормального уравнения, так как коэффициенты этого уравнения должны удовлетворять условию

$$[ab] + [bb] + [bc] + [bl] = [bs]. \tag{9}$$

Подобным же образом составляют третье нормальное уравнение; коэффициенты его должны удовлетворять условию

$$[ac] + [bc] + [cc] + [cl] = [cs]. \tag{10}$$

Составление контрольных сумм $[as]$, $[bs]$, $[cs]$ необходимо для уверенности в отсутствии промахов при составлении коэффициентов нормальных уравнений.

Коэффициенты нормальных уравнений (5) обладают следующими свойствами: 1) квадратичные коэффициенты $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, приходящиеся на диагональ, идущую от x_1 к x_3, суть числа ***положительные***; 2) коэффициенты, симметричные относительно проведенной в (5) диагонали, равны друг другу. Эти неквадратичные коэффициенты могут быть как положительными, так и отрицательными.

Решение нормальных уравнений (5), если число их не превосходит двух или трех, может быть выполнено по формулам, приведенным в отделе I. При большем числе уравнений удобно применить особый прием „исключения", на чем мы не будем, однако, останавливаться ввиду специального характера этого вопроса. Когда найдены вероятнейшие значения неизвестных x_1, x_2 и x_3, то вероятнейшие поправки v_1, v_2, v_3, . . . , v_n получаются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - l_1 \\ v_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - l_2 \\ v_3 &= a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 - l_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 - l_n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

т. е. надо найденные величины неизвестных подставить в уравнение наблюдений (1)*, тогда разности

$$l_{\text{выч.}} - l_{\text{набл.}} = v_i$$

дают искомые вероятнейшие поправки v_1, v_2, v_3, . . . , v_n.

Составив сумму квадратов их $[vv]$, среднюю квадратическую ошибку ε_0 отдельного наблюдения l_i получают по формуле

$$\varepsilon_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-3}} \tag{12}$$

Эта величина и служит характеристикой точности наблюдений, т. е. дает среднюю квадратическую ошибку любого из чисел l_1, l_2, l_3, . . . l_n, так как по условию точность их одинакова.

Если число неизвестных не 3, а m, то формулу (12) в общем виде пишут так:

$$\varepsilon_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-m}} \qquad (13)$$

Определение средних ошибок найденных неизвестных x_1, x_2 и x_3. Эта задача при числе неизвестных не более двух решается довольно просто: нормальные уравнения, соответствующие этому случаю, будут:

$$[aa]\,x_1 + [ab]\,x_2 = [al];$$
$$[ab]\,x_1 + [bb]\,x_2 = [bl].$$

Исключая неизвестную x_1, получим одно уравнение

$$[bb1]\,x_2 = [bl1],$$

откуда

$$x_2 = \frac{[bl1]}{[bb1]}.$$

где символы $[bb1]$ и $[bl1]$ означают сокращенно выражения:

$$[bb1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] \quad \text{и} \quad [bl1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al].$$

Величина $[bb1]$ равна весу p_2 второй неизвестной, а вес p_1 первой неизвестной равен $p_2\frac{[aa]}{[bb]}$, т. е.

$$p_2 = [bb1]. \qquad (14)$$

$$p_1 = p_2\frac{[aa]}{[bb]}. \qquad (15)$$

Средние ошибки ε_1 и ε_2 искомых неизвестных будут равны

$$\varepsilon_1 = \frac{\pm\varepsilon_0}{\sqrt{p_1}} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \frac{\pm\varepsilon_0}{\sqrt{p_2}}. \qquad (16)$$

Определение весов и средних ошибок в случае трех и большего числа неизвестных несколько сложнее, и мы не будем останавливаться на этом, а отошлем читателей к указанным выше руководствам Чеботарева или Шилова.

5. Определение коэффициентов периодических рядов

Во многих задачах приходится определять коэффициенты A_0, B_1, C_1, B_2, C_2 и т. д. тригонометрического ряда

$$l = A_0 + B_1\sin\varphi + C_1\cos\varphi + B_2\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi + B_3\sin 3\varphi + C_3\cos 3\varphi + \ldots, \qquad (1)$$

где левая часть l получается из наблюдений.

С такого рода вопросами встречаются в теории девиации магнитного компаса, в теории радиодевиации и во многих других задачах.

Если из наблюдений получен целый ряд значений функции l для разных значений аргумента (угол φ), то для нахождения постоянных в данном вопросе коэффициентов A_0, B_i, C_i следует применять указанный выше прием косвенного определения неизвестных путем составления и решения нормальных уравнений. В данном случае неизвестными x_1, x_2, x_3 . . . будут коэффициенты A_0, B_i и C_i, а роль коэффициентов a_i, b_i, c_i будут играть sin'ы и cos'ы углов φ.

Однако решение задачи значительно упрощается, если представляется возможным так расположить наблюдения, чтобы величины l_i соответствовали разным, равномерно изменяющимся через всю окружность от 0° до 360° значениям аргумента φ через некоторый определенный интервал $\sigma = \frac{360^\circ}{n}$, где n — число наблюдений. Пусть для n разных значений аргумента

$$\varphi = 0,\ \sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma,\ \ldots,\ (n-1)\sigma$$

получено из наблюдений n значений функции

$$l_0,\ l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots,\ l_{n-1}.$$

Тогда система нормальных уравнений (5) предыдущего параграфа, служащая для определения неизвестных коэффициентов A_0, B_k и C_k, принимает следующий простой вид:

$$\left.\begin{aligned} nA_0 &= \sum_{i=0}^{i=n-1} l_i = [l] \\ \frac{n}{2} B_k &= \sum_{i=0}^{i=n-1} l_i \sin(ki\varphi) \\ \frac{n}{2} C_k &= \sum_{i=0}^{i=n-1} l_i \cos(ki\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом, все коэффициенты определяются этими уравнениями сразу, независимо один от другого.

Указанный метод определения коэффициентов применяется в теории девиации магнитного компаса, в теории радиодевиации и т. п.

Для определения точности найденных коэффициентов A_0, B_k, C_k надо выведенные указанным путем коэффициенты подставить в основное уравнение (1) и найти так называемые вычисленные значения величин l_i для всех n значений аргумента. Затем составить разности

$$v_i = l_{\text{выч.}} - l_{\text{набл.}} \qquad (3)$$

которые дадут вероятнейшие поправки к наблюденным величинам l_i, и, наконец, вычислить сумму квадратов v_i. Тогда по формуле

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}}, \qquad (4)$$

где m — число всех определенных коэффициентов A_0, B_k, C_k, найдется средняя ошибка ε_0 одного наблюдения, т. е. любого из чисел l_i. Средние ошибки всех коэффициентов B_k, C_k одинаковы и равны

$$\varepsilon_k = \frac{\pm \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{n}{2}}}, \qquad (5)$$

а средняя ошибка коэффициента A_0 будет

$$\varepsilon_A = \frac{\pm \varepsilon_0}{\sqrt{n}}, \qquad (6)$$

т. е. постоянный коэффициент A_0 определяется точнее остальных. Величину $[vv]$ можно вычислить еще и другим путем. Обозначим $w_l = l_l - A_0$ и $R_k^2 = B_k^2 + C_k^2$, тогда

$$[vv] = [ww] - \frac{n}{2}[RR]. \tag{7}$$

§ 6. Определение вероятнейших значений неизвестных, связанных условиями

Иногда искомые поправки x_1, x_2, x_3 и т. д. должны быть определены по способу наименьших квадратов при том условии, что они должны строго удовлетворять одному или нескольким данным уравнениям. Эти уравнения, большею частью линейные относительно искомых величин x_1, x_2, x_3 . . ., называются *условными уравнениями*.

Как сказано выше, определение неизвестных поправок x_1, x_2, x_3 сводится к отысканию минимума функции

$$F = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2, \tag{1}$$

где p_1, p_2 и p_3 — веса наблюдений, т. е. веса величин x_1, x_2, x_3.

Так как эти неизвестные должны удовлетворять условному уравнению (для простоты одному) вида

$$\varphi = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - w = 0, \tag{2}$$

то задача сводится к так называемому относительному минимуму (см. Справочник, вып. 1, отд. II, гл. 1, § 7).

Можем поэтому написать сразу

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_3}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}} = 2k,$$

где k есть множитель, называемый *коррелата*. Поэтому

$$\frac{p_1x_1}{a_1} = \frac{p_2x_2}{a_2} = \frac{p_3x_3}{a_3} = k,$$

откуда искомые неизвестные получаются просто:

$$x_1 = \frac{a_1k}{p_1}; \quad x_2 = \frac{a_2k}{p_2}; \quad x_3 = \frac{a_3k}{p_3}, \tag{3}$$

т. е. имеем общее правило, которое можно формулировать так: *при существовании одного условного уравнения вероятнейшие значения искомых неизвестных прямо пропорциональны соответственным коэффициентам условного уравнения и обратно пропорциональны весам наблюдений.*

Для определения коррелаты k подставим найденные значения (3) в условное уравнение (2) и получим:

$$k = \frac{w}{\frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3}} = \frac{w}{\left[\frac{aa}{p}\right]}. \tag{4}$$

Если веса наблюдений одинаковы, то решение будет проще, а именно:

$$x_1 = a_1k; \quad x_2 = a_2k; \quad x_3 = a_3k, \tag{5}$$

$$k = \frac{w}{[aa]}, \qquad (6)$$

Этот вывод имеет большое применение в разных вопросах геодезии, астрономии и кораблевождения.

Пример. Положение некоторой точки P на плоскости определено пересечением трех независимых линий положения *I*, *II* и *III*.

Вследствие ошибок наблюдений эти линии не пересекутся в одной точке, а образуют треугольник ABC, который называют *треугольником погрешностей* или *ложным треугольником*. Задача состоит в определении вероятнейшего положения искомой точки P. Принимая, что в данном случае действуют только одни случайные ошибки наблюдений, сведем задачу просто к применению указанных выше формул.

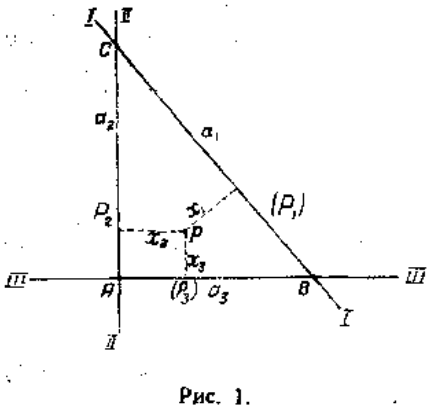

Рис. 1.

Обозначим через x_1, x_2, x_3 вероятнейшие расстояния искомой точки P от сторон ложного треугольника, а через a_1, a_2 и a_3 — длины сторон ложного треугольника, измеренные в каких угодно произвольных единицах длины. Если веса наблюдений, определяющих линии положения *I*, *II* и *III*, равны числам p_1, p_2 и p_3, то для определения искомых неизвестных надо найти минимум функции (1) при существовании одного условного уравнения (2). Легко понять, что величина w есть не что иное как удвоенная площадь треугольника погрешности ABC, определить которую можно простейшим образом, измерив высоты в этом треугольнике; тогда

$$S = \frac{1}{2} a_1 h_1 = \frac{1}{2} a_2 h_2 = \frac{1}{2} a_3 h_3. \qquad (7)$$

Таким образом, вероятнейшим положением точки P внутри треугольника погрешностей будет точка, находящаяся в расстояниях, *прямо пропорциональных длинам сторон ложного треугольника и обратно пропорциональных весам соответствующих линий положения*, как это видно из формулы (3).

Коэффициентом пропорциональности k в этом случае будет величина, находимая по формуле

$$k = \frac{2S}{\left[\frac{aa}{p}\right]}, \qquad (8)$$

если веса наблюдений различны, или

$$k = \frac{2S}{[aa]}, \qquad (9)$$

если веса линий положения одинаковы.

Это совершенно общее решение годится для каких угодно способов определения положения точки P на плоскости в случае одного избы-

точного наблюдения. Но основным условием применимости этого решения будет то, что ошибки, послужившие причиной образования ложного треугольника, имеют характер *случайных ошибок*.

В частных случаях применения этого метода останется только установить численные значения весов наблюдений. Но приведенное здесь правило отнюдь неприменимо, если ложный треугольник образован под влиянием ошибок систематического характера. Отыскание истинного места точки P в таких случаях следует делать сообразно закону действия систематических ошибок.

Вместо аналитически-графического способа нахождения вероятнейшего положения точки, можно применить чисто графический прием.

Сущность этого приема состоит в следующем.

Делим в точке H_1 сторону $a_1 = BC$, противолежащую углу A, на части, пропорциональные весам p_3 и p_2 сторон AB и AC (рис. 2).

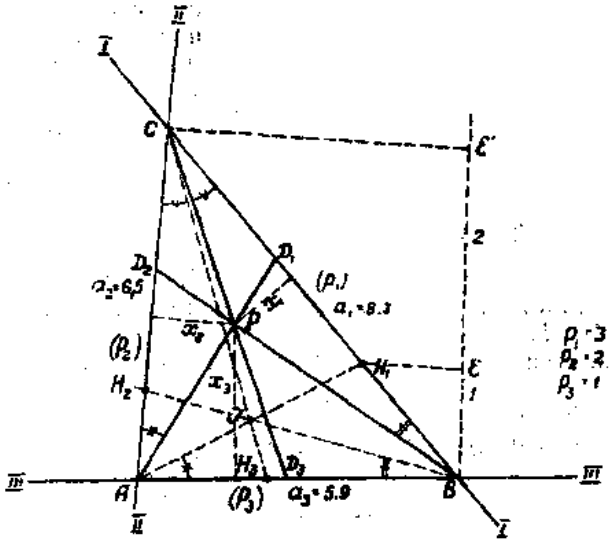

Рис. 2.

Найденную точку H_1 соединяем с вершиной A и проводим линию AD_1 под углом $CAD_1 = H_1AB$. Таким же образом делим в точке H_2 сторону $a_2 = AC$, противолежащую углу B, на части, пропорциональные весам p_3 и p_1, соединяем точку H_2 с вершиной B и строим угол $CBD_2 = ABH_2$. Точка P пересечения прямых $AD_1 = BD_2$ и будет искомая. Очевидно, что если сторону AB разделить в отношении весов p_1 и p_2 в точке H_3 и построить угол $BCD_3 = ACH_3$, то точка P придется на линии CD_3.

Пересечение трех линий AD_1, CD_3 и BD_2 в одной точке P служит контролем верности построений; в равной степени линии AH_1, CH_2 и BH_2 должны пересекаться также в одной точке I. Указанное свойство есть следствие теоремы Чевы (см. Справочник, вып. 1, отд. I, гл. 2, § 7). Однако, несмотря на всю кажущуюся простоту, графическое построение берет значительно больше времени, чем применение общих формул (3) — (9), при вычислении по которым в большинстве случаев достаточно применения логарифмической линейки.

В большинстве случаев особенно точного решения этой задачи не приходится добиваться, а потому принимают часто, что веса наблюдений равны между собой.

В таком случае графический прием становится несколько проще: надо провести медианы (рис. 3) AH_1, BH_2 и CH_3 и при другой стороне угла построить соответственно равные углы, тогда линии AD_1, BD_2 и CD_3 пересекутся в точке P, которая и будет искомой.

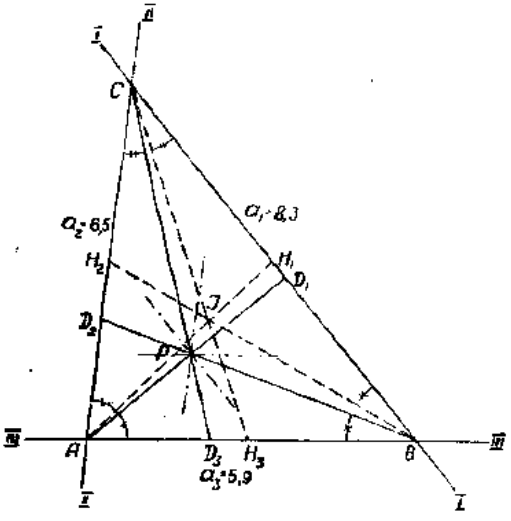

Рис. 3.

Пусть треугольник погрешностей ABC, полученный в пересечении трех линий положения I, II и III разных весов, имеет следующие размеры:

$$a_1 = CB = 8{,}3 \text{ см}$$
$$a_2 = AC = 6{,}5 \text{ „}$$
$$a_3 = AB = 5{,}9 \text{ „}$$

Веса p_1, p_2 и p_3, характеризующие точность линий положения около точки P, будут соответственно 3, 2 и 1.

Вычисления располагаем в следующем порядке.

$p_1 = 3$	$a_1 = 8{,}3$	$a_1^2 = 68{,}9$	$a_1^2 : p_1 = 23{,}0$
$p_2 = 2$	$a_2 = 6{,}5$	$a_2^2 = 42{,}2$	$a_2^2 : p_2 = 21{,}1$
$p_3 = 1$	$a_3 = 5{,}9$	$a_3^2 = 34{,}8$	$a_3^2 : p_3 = 34{,}8$
		$[aa] = 145{,}9$	$\left[\frac{aa}{p}\right] = 78{,}9$

$$2S = w = 37{,}6 \text{ см}^2; \qquad k = \frac{37{,}6}{78{,}9} = 0{,}476;$$

$$x_1 = \frac{a_1}{p_1} k = \frac{8{,}3}{3} 0{,}476 = 1{,}32; \qquad x_2 = \frac{a_2}{p_2} k = \frac{6{,}5}{2} 0{,}476 = 1{,}55;$$

$$x_3 = \frac{a_3}{p_3} k = \frac{5{,}9}{1} 0{,}476 = 2{,}81.$$

Найдя величины $x_1 = 1{,}32$ *см*, $x_2 = 1{,}55$ *см* и $x_3 = 2{,}81$ *см*, проводим линии параллельно соответственным сторонам в расстояниях 1,32 *см*, 1,55 *см* и 2,81 *см*, которые в пересечении и определят точку P (рис. 2).

Если веса линий положений одинаковы, то по формулам (8) и (9) найдем

$$k = \frac{37{,}6}{145{,}9} = 0{,}258;$$

$$x_1 = 8{,}3 \cdot 0{,}258 = 2{,}14 \text{ см}; \qquad x_2 = 6{,}5 \cdot 0{,}258 = 1{,}68 \text{ см};$$
$$x_3 = 5{,}9 \cdot 0{,}258 = 1{,}52 \text{ см}.$$

Как видно, введение весов сдвигает искомое положение точки P.

Для решения задачи графическим приемом надо действовать, как сказано выше. А именно, если веса линий положения различны, то делим сторону, например BC, в точке H_1 пропорционально весам сторон прилежащих, т. е. в отношении $1:2$. Последнее действие графически, как известно, делается так: проводим линию $B\varepsilon'$ произвольно через точку B и на ней откладываем отрезки произвольной длины $B\varepsilon$ и $B\varepsilon' = 2B\varepsilon$, пропорциональные весам p_1 и p_2; точку ε' соединяем с точкой C и через точку ε проводим прямую $\varepsilon H_1 \parallel \varepsilon' C$; в точке H_1 сторона a_1 будет разделена пропорционально весам $p_1 = 1$ и $p_2 = 2$. Дальнейшие построения понятны из рис. 2. То же самое построение в случае равных весов сделано на рис. 3.

Глава 2

ТЕОРИЯ ОШИБОК НА ПЛОСКОСТИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ 1. Основы учения о геометрических местах 27
§ 2. Общий прием построения линий положения 30
§ 3. Примеры определения элементов линий положения 32
§ 4. Эллипсы ошибок 42
§ 5. Средние квадратические ошибки координат определяемой точки 47
§ 6. Средняя квадратическая ошибка положения точки 49
§ 7. Средняя квадратическая ошибка M положения точки, определенной по трем наблюдениям, при наличии добавочной неизвестной 55
§ 8. Замечания о вычислении градиентов 62

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

П. А. Гельвих, Теория вероятностей, изд. Артиллерийской академии РККА Ленинград, 1933.

В. В. Каврайский, Линии положения и их применение, „Известия В.-М. Академии" № 2, 1939.

В. В. Каврайский, Обобщенный способ линий положения, „Записки по гидрографии" № 2, 1941/43. С начала издания 121 bis.

Н. Г. Келль, Основы графического уравнивания при вставке триангуляционных сетей, „Записки по гидрографии". Приложение к № 3, 1940.

§ 1. Основы учения о геометрических местах

1. Для определения положения точки на плоскости, на поверхности Земли или в пространстве измеряют какие-либо функции u координат этой точки. На основании таких измерений положение искомой точки можно определить одним из двух способов: 1) аналитическим путем, т. е. вычислением координат этой точки, и 2) вычислительно-графическим приемом, используя геометрические места, соответствующие сделанным наблюдениям. Число уравнений как в первом приеме, так и в методе геометрических мест должно быть не меньше двух для определения положения точки на плоскости или на поверхности Земли и не менее трех для задачи в пространстве.

Зависимость функции u от положения точки может быть представлена линиями равного значения, или *изолиниями* ($u = \text{const}$) этой функции. Например, высота светила h есть функция широты и долготы точки на земной поверхности. *Круги равных высот* на сфере будут изолинии значений функции $u = h = \text{const}$, а изображения кругов равных высот на морской навигационной карте — *кривые равных высот* — изображения этих изолиний.

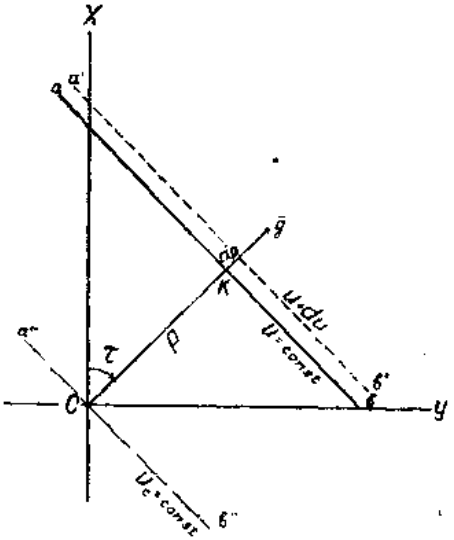

Рис. 4.

Если приближенное положение искомой точки известно, а на практике это условие всегда выполняется, то для определения положения точки, в точности отвечающего сделанным измерениям, а главное для оценки точности этого определения, достаточно рассматривать изолинии только в малой области около определяемой точки и заменить часть изолинии *прямой* касательной к ней, или секущей, проходящей через две близкие точки на изолинии. Эти прямые называют обыкновенно *линиями положения*.

2. В достаточно малой области всякую поверхность можно рассматривать как плоскость; изолинии, относящиеся к разным близким между собой значениям одной и той же функции u, можно считать

параллельными прямыми, а расстояния между ними — пропорциональными разностям соответствующих значений функции u.

Расположение линий положения какой-нибудь известной функции u вблизи некоторой точки плоскости C (рис. 4) вполне характеризуется одним вектором-градиентом $\vec{g}$ функции u в этой точке. Направление градиента есть направление нормали к изолинии, *обращенное в сторону возрастающих значений функции u.*

Модуль g градиента $\vec{g}$ есть коэффициент пропорциональности между приращением du функции u и расстоянием dp между соответствующими линиями положения при бесконечно малом, а практически достаточно малом dp. Иными словами,

$$du = g\,dp, \tag{1}$$

или

$$g = \frac{du}{dp}, \tag{2}$$

т. е. *модуль g градиента* $\vec{g}$ *есть производная функции u по нормали к изолинии.*

Обозначим в общем виде зависимость функции u от координат x и y так:

$$u = f(xy); \tag{*}$$

обозначим также x_c и y_c приближенные „счислимые" координаты искомого места точки P и через $u_c = f(x_c\, y_c)$ соответствующую этим значениям величину функции u; пусть Δx и Δy — малые поправки к счислимым значениям координат, причем будем считать эти поправки столь малыми, что квадратами и высшими степенями их можно пренебречь. Искомые координаты x и y, строго удовлетворяющие сделанному измерению функции u и равные

$$\left.\begin{aligned} x &= x_c + \Delta x \\ y &= y_c + \Delta y \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

должны удовлетворять уравнению (*). Подставив их в уравнение (*) и пользуясь разложением в ряд для двух переменных, можем написать:

$$u = f(x_c + \Delta x,\ y_c + \Delta y) = f(x_c,\ y_c) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c \Delta y + \ldots \tag{**}$$

Так как $f(x_c\, y_c)$ есть именно „счислимое" значение функции u, а частные производные этой функции по x и y, вычисленные для тех же „счислимых" значений координат x_c и y_c, будут постоянными числами, то можно ввести обозначения:

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c; \quad b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_c. \tag{4}$$

Обозначим еще через l разность между измеренным и вычисленным значениями функции, т. е. положим

$$l = u - u_c. \tag{5}$$

Тогда можем выражение (**) написать в таком виде:

$$a\Delta x + b\Delta y - l = 0. \tag{6}$$

Это выражение и дает зависимость между искомыми поправками Δx и Δy координат x_c и y_c и измеренным значением функции u. При

любом аналитическом виде функции $u = f(x, y)$ указанная в выражении (6) зависимость приведена к линейной форме, подобно тому как в способе наименьших квадратов принято всякую зависимость между искомыми неизвестными приводить к линейному виду.

Благодаря тому что здесь имеется только две переменные, полученному результату можно дать очень важное и полезное геометрическое толкование.

Рассматривая в выражении (6) величины Δx и Δy как текущие координаты, видим, что это есть уравнение прямой линии – ***линии положения***, причем начало координат находится в точке C. Разделив все члены этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ и положив

$$\cos\tau = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\tau = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad p = \frac{u - u_c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{7}$$

получим уравнение линии положения в так называемой ***нормальной форме***

$$\Delta x \cos\tau + \Delta y \sin\tau - p = 0. \tag{8}$$

Легко видеть, что p представляет расстояние от счислимой точки C до определяющей точки K на линии положения (рис. 4 или 5).

На основании выражений (7) направление градиента, а также и модуль его определятся из двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} g\cos\tau = a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c \\ g\sin\tau = b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_c \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Модуль градиента $\vec{g}$ равен

$$g = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{10}$$

Таким образом, если задан аналитический вид функции $u = f(xy)$, то абсолютная величина g и направление градиента функции u могут быть легко вычислены по формулам (7) и (10).

3. Размерность единицы градиента согласно формуле (2) может быть представлена символической формулой

$$[g] = \frac{[u]}{[l]},$$

где $[g]$ – символ размерности единицы градиента,

$[u]$ – размерность функции u,

$[l]$ – размерность единицы длины.

При определении положения места точки приходится обычно измерять или длины, или углы.

В первом случае размерность функции u будет линейная, т. е. $[l]$, а во втором нулевая, так как углы, измеряемые в радианах, выражаются отвлеченными числами. Поэтому:

при линейных измерениях размерность градиента функции u будет нулевая, т. е. градиенты будут выражаться отвлеченным числом;

при угловых измерениях размерность градиента функции u будет $[l]^{-1}$.

§ 2. Общий прием построения линий положения

Общий прием построения линии положения на карте заключается в следующем.

Найдем „счислимое" значение функции u_c, соответствующее приближенному положению C искомой точки P. На карте в равноугольной проекции или на графленой (для удобства) бумаге нанесем точку C, проведем начальное направление CX, от которого отсчитывают углы τ.

Составим разность $u-u_c$ и вычислим величину p по формуле

$$p = \frac{u-u_c}{g}. \qquad (11)$$

где g есть модуль градиента функции u поблизости с искомым местом точки P — точкой C.

Направление градиента определится выражением

$$\operatorname{tg}\tau_c = \frac{b}{a} \qquad (12)$$

[см. формулу (9)].

Теперь надо от счислимого места C отложить до точки K по направлению τ отрезок p и через точку K провести линию ab, перпендикулярную к направлению градиента. Это и будет искомая линия положения (рис. 5).

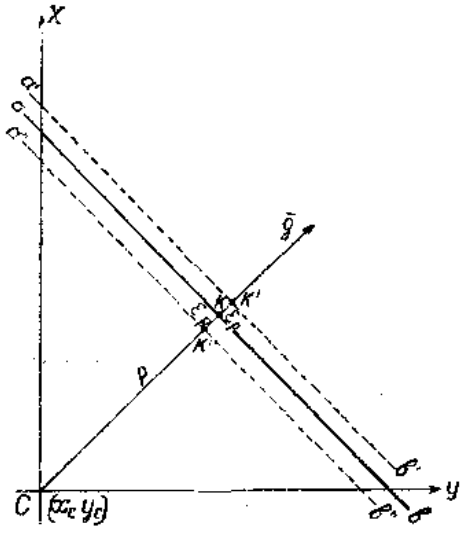

Рис. 5.

Величину p и направление τ называют *элементами* линии положения, так как, зная их, построение линии делается указанным выше весьма общим приемом, впервые предложенным для частного случая построения на карте высотной линии положения.

Если измеренная величина функции u получит элементарно малое приращение du, то соответствующая этому новому значению функции линия положения $a'b'$ (рис. 4) передвинется параллельно самой себе на величину dp, причем

$$dp = \frac{du}{g}. \qquad (13)$$

Поэтому, если рассматривать du как ошибку наблюдения или измерения функции u, то параллельное перемещение линии положения будет тем меньше, чем больше численная величина градиента g.

Если du — случайная ошибка наблюдений, то dp — соответствующее случайное параллельное перемещение линии положения.

Если ε_u есть средняя квадратическая ошибка измерения функции u, то величина

$$\varepsilon_p = \pm\frac{\varepsilon_u}{g} \qquad (14)$$

представит среднюю квадратическую ошибку расстояния $p = ck$, или среднее квадратическое значение параллельного перемещения линии положения ab (рис. 5), происходящее вследствие средней квадратической ошибки измерения функции u.

Поэтому, если указанным выше приемом построена линия положения ab, соответствующая измеренной величине функции u, то вследствие случайных ошибок наблюдений со средней квадратической ошибкой ε_u линия положения ab может занимать любое положение между $a'b'$ и $a''b''$, где отрезки $KK' = KK'' = \varepsilon_p$ (но может оказаться и вне этих границ).

Вероятность того, что действительное место линии положения не выйдет из указанных границ, подобно случаю средней квадратической ошибки скалярных величин, равна $0{,}68 \approx {}^2/_3$.

Возьмем известное из теории ошибок выражение

$$\varepsilon_x = \frac{\pm \varepsilon_0}{\sqrt{p_x}}, \qquad (14)$$

где p_x есть вес искомой величины x, а ε_0—средняя ошибка наблюдения с весом, равным 1. Если ε_u есть средняя ошибка наблюдения функции u, то

$$\varepsilon_u = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\pi}}.$$

Здесь π есть вес наблюдения функции u, следовательно, вместо (14) можно написать

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\pi g}}. \qquad (15)$$

Обозначая через П вес линии положения, можно написать, что $П = \pi g^2$ или, заменив

$$\pi = \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_u^2},$$

$$П = \frac{\varepsilon_0^2 g^2}{\varepsilon_u^2}. \qquad (16)$$

Отсюда видно, что веса линий положений будут равны при равных градиентах и одинаковой точности измерения функции u. Если же даже при одинаковых градиентах точность измерения разных функций u различна, то и веса соответствующих им линий положений будут разные.

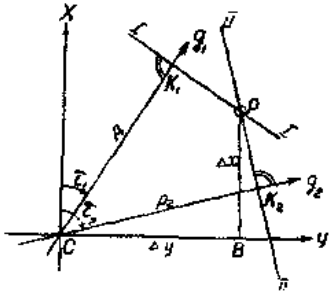

Рис. 6.

Если измерены значения u_1 и u_2 двух функций координат, то для определения места наблюдателя на карте надо построить обе линии положения, поступая, как указано выше. Точка пересечения P линий положения I и II (рис. 6) определит местоположение такой точки, координаты которой x и y строго удовлетворят сделанным наблюдениям и будут равны $x = x_c + \Delta x$ и $y = y_c + \Delta y$, где $\Delta x = PB$ и $\Delta y = CB$. Расстояния $CK_1 = p_1$ и $CK_2 = p_2$, согласно формуле (11), надо вычислять так:

$$p_1 = \frac{u_1 - u_c}{g_1}; \qquad p_2 = \frac{u_2 - u_c}{g_2},$$

где g_1 и g_2—абсолютные величины градиентов функций u_1 и u_2, направления которых τ_1 и τ_2 найдутся по формуле (10), а счислимые значения функций u_c' и u_c'' получаются обычным путем — вычислением значений функций u_1 и u_2 при $x = x_c$ и $y = y_c$.

§ 3. Примеры определения элементов линий положения

Рассмотрим несколько примеров из астрономии, геодезии, гидрографии и навигации, где метод линий положения может быть применен с пользой.

Пример 1. Высотная линия положения.

Высота h светила есть функция широты и долготы наблюдателя, определяемая формулой

$$h = \arcsin (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t_{гр} - \lambda),$$

где $t_{гр}$ есть часовой угол светила в Гринвиче в момент наблюдения

$$a = \frac{\partial h}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\cos A; \qquad b = -\frac{\partial h}{\partial \lambda \cos \varphi} = \frac{\partial u}{\partial y} = \sin A.$$

Если считать азимуты астрономически от точки S горизонта через W,

$$g = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{\cos^2 A + \sin^2 A} = +1.$$

Расстояние p определяющей точки K от счислимой точки C $p = \frac{u - u_c}{g} = h - h_c = l$.

Направление градиента $\tau = A - \pi$, т. е. совпадает с направлением азимута светила (положительная ось X направлена к N). Построение линии положения общеизвестно и показано на рис. 5.

Пример 2. Азимутальная линия положения.

Так как азимут A светила есть функция широты и часового угла, т. е. $A = f(\varphi, t)$, то

$$a = \frac{\partial A}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sin q \cos \delta}{\cos \varphi \operatorname{tg} z}; \qquad b = \frac{\partial A}{\cos \varphi \, \partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos q \cos \delta}{\cos \varphi \sin z};$$

$$g^2 = \frac{\cos^2 \delta}{\cos^2 \varphi \sin^2 z} (1 - \sin^2 q \sin^2 z).$$

Так как по рис. 7 выходит, что $\sin d = \sin q \sin z$, а $\frac{\cos \delta}{\sin z} = \frac{\sin A}{\sin t}$ и $\sin t \cos \varphi = \sin d$, то величина градиента g равна $g = \frac{\sin A}{\operatorname{tg} d}$.

Направление градиента τ определится из уравнения

$$\operatorname{ctg} \tau = \frac{a}{b} = -\operatorname{tg} q \cos z,$$

а из треугольника EDZ (рис. 7) следует, что

$$\operatorname{ctg} a_z = \operatorname{tg} q \cos z,$$

поэтому

$$\tau = 180^\circ - a_z.$$

Если азимуты считать от точки N горизонта, как принято в навигации и геодезии, то направление градиента будет

$$\tau = a_z.$$

Построение азимутальной линии положения делается таким образом: от счислимого места C (рис. 8) откладываем по направлению градиента τ отрезок $CK = p$, вычислив его величину по формуле

$$p = \frac{A_c - A}{g} = \frac{(A_c - A)\operatorname{tg} d}{\sin A_c} = \frac{(a - a_c)\operatorname{tg} d}{\sin a_c},$$

сообразно тому, какая принята система счета азимутов — астрономическая (A) или геодезическая (a). Линия $\alpha\alpha$, перпендикулярная к направлению градиента, является азимутальной линией положения.

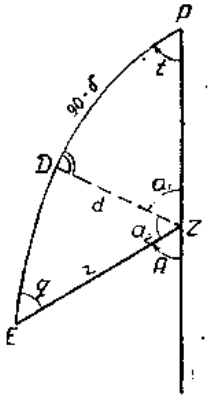

Рис. 7.

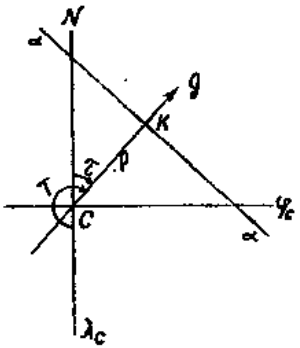

Рис. 8.

Если производные азимута взять в другом виде, а именно:

$$a = \frac{\partial a}{\partial \varphi} = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} z}; \quad b = \frac{1}{\cos \varphi}\frac{\partial a}{\partial t} = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\cos a}{\operatorname{tg} z},$$

где азимут считается от точки N горизонта, то модуль градиента может быть найден по формуле

$$g^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi - 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} h \cos a + \operatorname{tg}^2 h. \qquad (17)$$

Эта формула имеет простое геометрическое толкование (рис. 9): отложим по меридиану счислимого места в произвольном масштабе отрезок $Z\Pi = \operatorname{tg} \varphi$, а по направлению азимута a светила E отрезок $ZE = \operatorname{tg} h$. Соединив точки П и E, получим абсолютную величину g градиента азимута. Как будет ниже показано, прямая ΠE параллельна азимутальной линии положения, а потому направление градиента $\vec{g}$ азимута к ней перпендикулярно.

Пример 3. Измерение расстояния s от известной точки A до определяемой P.

Если каким-нибудь способом измерено расстояние s от известной точки A (x_1, y_1) до определяемой P, то геометрическое место есть окружность $\alpha\beta$, описанная вокруг точки A радиусом s (рис. 10). Уравнение геометрического места будет

$$U = s = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

поэтому

$$a = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_c = \frac{x_c - x_1}{s_c} = \cos \tau_c; \qquad b = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_c = \frac{y_c - y_1}{s_c} = \sin \tau_c,$$

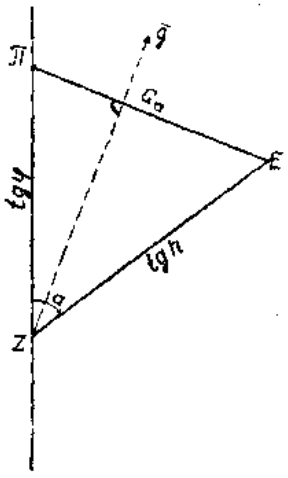

Рис. 9.

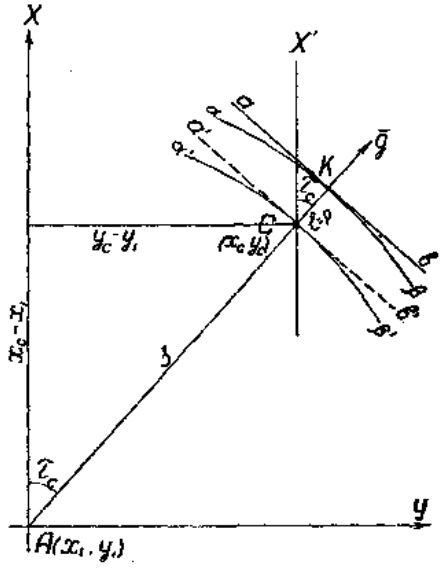

Рис. 10.

модуль градиента $g = +1$, а направление его совпадает с направлением $(AC) = \tau_c$ линии AC. Уравнение линии положения, т. е. касательной ab, будет

$$\Delta x \cos \tau_c + \Delta y \sin \tau_c - l = 0,$$

где

$$l = s - s_c = p.$$

Таким образом, для построения линии положения надо от счислимого места C по направлению τ_c отложить длину $CK = p = l = s - s_c$ и через определяющую точку K провести прямую ab перпендикулярно к линии CK. Это будет линия положения, соответствующая измеренному расстоянию s. Само собой разумеется, что эти соображения остаются в силе, независимо от того, какими приемами и приборами определяют или измеряют расстояние.

Пример 4. Линия положения и градиент измеренного направления с данной точки на определяемую.

а) Задача на плоскости

Если с известной по координатам точки $A(x_1\, y_1)$ (рис. 11) определено направление на определяемую P, т. е. измерен каким-нибудь угломерным инструментом дирекционный угол α или угол α_0 между каким-нибудь известным предметом B и определяемой точкой P, то изолиния или геометрическое место, соответствующее этому наблюдению, будет прямая, проходящая через точку A (рис. 11) под углом α к начальному направлению, а уравнение геометрического места будет

$$\alpha = U = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right). \qquad (*)$$

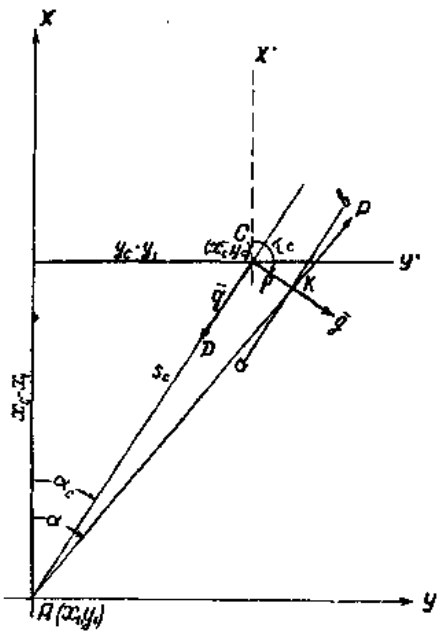

Рис. 11.

Пусть точка $C(x_c, y_c)$ есть счислимое место определяемой точки P.

Тогда

$$a = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_c = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_c = -\frac{y_c - y_1}{s_c^2};$$

$$b = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_c = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_c = +\frac{x_c - x_1}{s_c^2};$$

$$s_c^2 = (x_c - x_1)^2 + (y_c - y_1)^2.$$

Модуль градиента g равен

$$g = +\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{s_c} \qquad (18)$$

и направлен под прямым углом к изолинии AC в счислимом месте, т. е.

$$\tau_c = \alpha_c + \frac{\pi}{2}.$$

Значит, если по направлению $\vec{g}$ отложить отрезок

$$p = \frac{\alpha - \alpha_c}{g} = s_c\,(\alpha - \alpha_c), \qquad (19)$$

где α_c вычисляют по формуле (*), то найдем место определяющей точки K и, проведя через нее прямую ab перпендикулярно направлению градиента, получим линию положения, отвечающую сделанному наблюдению. Уравнение этой линии положения будет

$$\Delta x \cos\left(\alpha_c + \frac{\pi}{2}\right) + \Delta y \sin\left(\alpha_c + \frac{\pi}{2}\right) - (\alpha - \alpha_c)\, s_c = 0.$$

Как видно, луч AP, на котором находится искомая точка P, повернут на элементарно малый угол $\alpha - \alpha_c$ относительно построенной линии положения ab; но действие этого фактора на положение искомой точки P скажется величинами второго порядка, которыми мы пренебрегаем согласно условию. Из выражения (18) следует, что $gs_c = 1$.

Если от точки C отложить в направлении к точке A отрезок $CD = \frac{1}{s_c}$, то точка D представит собой *инверсию* точки A относительно счислимого места C как *центра инверсии* (см. Справочник, вып. 1, отд. II, гл. 5, § 8). А вектор $\overrightarrow{CD}$ представит собой градиент $\vec{g}$, т. е. градиент $\vec{g}$, повернутый на 90° в сторону возрастания углов α. Такое представление градиента, как видно будет из последующего, очень удобно, в частности при приближенном решении вопроса о точности определения места точки.

б) Задача на сфере

Пусть направление α измерено на предмет P_1, настолько отдаленный, что кривизной Земли нельзя пренебрегать. Если точка C_0 означает приближенное положение точки P, а α_c приближенное направление (счислимое), то расстояние $p = C_0K_0$ от счислимого места C_0 до определяющей точки K_0 легко найти по известной формуле элементарных сферических треугольников:

$$p = (\alpha - \alpha_c) \sin z_c = \frac{\alpha - \alpha_c}{g},$$

откуда видно, что градиент направления на сфере равен

$$g = \frac{1}{\sin z}. \qquad (20)$$

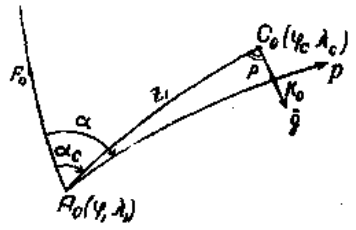

Рис. 12.

Построение линии положения на плоскости, касательной к сфере в точке C, представлено на рис. 11. Направление же градиента определится азимутом дуги C_0K_0.

Пример 5. Линия положения и градиент направления с определяемой точки P на заданную A.

Этот вопрос также распадается на два случая: а) задача на плоскости и б) задача на сфере.

а) Задача на плоскости

Если измерено направление α при определяемой точке P на известный предмет $A(x_1, y_1)$, то изолиния будет прямая, проходящая через точку A и составляющая угол α с начальным направлением, и

$$u = \alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right). \qquad (*)$$

Тогда

$$a = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_c = \frac{y_1 - y_c}{s_c^2} \quad \text{и} \quad b = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_c = -\frac{x_1 - x_c}{s_c^2}.$$

Абсолютная величина градиента попрежнему равна

$$g = +\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{s_c}, \tag{21}$$

а направление его τ_c определится формулой

$$\operatorname{tg} \tau_c = -\frac{x_1 - x_c}{y_1 - y_c} = -\operatorname{ctg} \alpha_c = \operatorname{tg}\left(\alpha_c - \frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$\tau_c = \alpha_c - \frac{\pi}{2},$$

т. е. градиент $\bar{g}$ будет перпендикулярен визируемой линии и направлен *влево*.

Отстояние определяющей точки K от счислимой точки C равно

$$p = \frac{\alpha - \alpha_c}{g} = s_c(\alpha - \alpha_c),$$

а уравнение линии положения ab будет

$$\Delta x \cos\left(\alpha_c - \frac{\pi}{2}\right) + \Delta y \sin\left(\alpha_c - \frac{\pi}{2}\right) - s(\alpha - \alpha_c) = 0.$$

Построение линии положения делается обычным путем: от счислимого места C по направлению τ_c градиента $\bar{g}$ откладываем отрезок $CK = (\alpha - \alpha_c)s = p$ и через определяющую точку K проводим линию ab перпендикулярно направлению градиента g. Линия положения ab повернута относительно геометрического места на элементарно малый угол $\alpha - \alpha_c$. Счислимое значение направления α_c получается, если в выражение (*) вместо текущих координат x и y подставить координаты счислимой точки x_c и y_c.

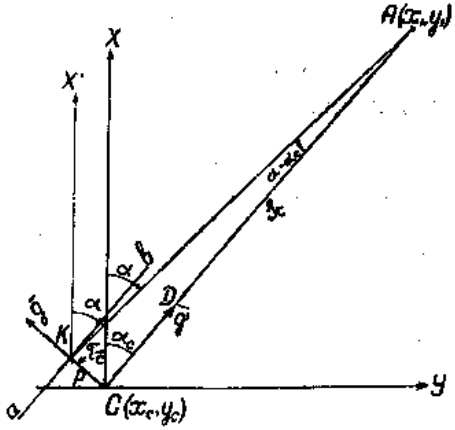

Рис. 13.

Если отложить от точки C по линии CA отрезок $CD = g' = \frac{1}{s_c}$, то точка D попрежнему будет инверсия точки A относительно центра инверсии C; это равносильно повороту градиента $\bar{g}$ на 90° в сторону *увеличивающихся* значений α.

В обоих последних случаях поворот градиента на 90° вправо, в сторону возрастающих значений функции α, приводит в совпадение новое направление градиента с линией, соединяющей счислимое место точки C с данной. Этот повернутый градиент будем обозначать $\bar{g}'$.

б) Задача на сфере

Для сферы (рис. 14) измеренное направление α на известную точку A_0 с определяемой P_0, считаемое от постоянного и произвольного направления C_0F_0, представляет сферический угол между большими кругами, проходящими через точки F_0 и A_0 при определяемой P_0. Счислимое значение этого направления будет сферический угол $F_0C_0A_0$. Градиент такого измерения найдется следующим образом. Проведем через A_0 большой круг A_0P_0 так, чтобы он составлял с направлением C_0F_0 угол α, а через α_c назовем счислимое значение функции α для точки C_0. В элементарном сферическом треугольнике $C_0L_0A_0$ имеем (по формулам § 9, гл. 4, отд. I, Справочник, вып. 1)

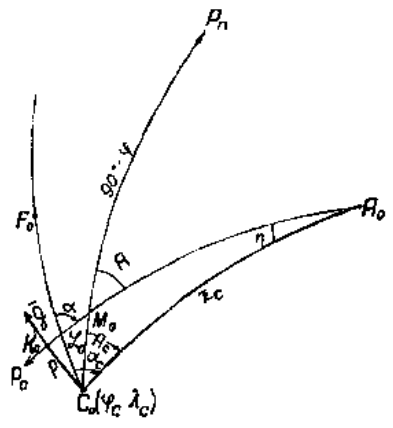

Рис. 14.

$$(\alpha - \alpha_c) = \eta \cos z_c; \qquad \eta \sin z_c = p;$$

поэтому отстояние p определяющей точки K_0 от счислимой C_0 равно

$$p = \frac{(\alpha - \alpha_c)}{\operatorname{ctg} z_c},$$

значит, градиент $\overline{g}$ направлен попрежнему перпендикулярно C_0A_0 в точке C_0, а модуль его равен

$$g = \operatorname{ctg} z_c = \operatorname{tg} h_c, \tag{22}$$

где z_c есть счислимое расстояние точки A_0 от C_0.

Пример 6. Градиент угла, измеренного при определяемой точке P, между двумя известными точками A и B.

а) Задача на плоскости

В случае задачи на плоскости угол γ можно рассматривать как разность двух дирекционных углов или плоских направлений α_1 и α_2 на предметы A и B; поэтому

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1,$$

а на основании теоремы о градиентах (Справочник, вып. 1, отд. II, гл. 3, § 4) градиентом $\overline{G}_\gamma$ угла γ будет геометрическая разность градиентов $\overline{g}_2$ и g_1 направлений на предметы A и B, т. е. получим

$$\overline{G}_\gamma = \overline{g}_2 - \overline{g}_1. \tag{23}$$

Построив при точке P градиенты $\overline{g}_1$ и $\overline{g}_2$ направлений на точки A и B и соединив концы векторов F и E прямой, увидим, что линия FE по величине и направлению представит градиент $\overline{G}_\gamma$ угла γ.

Пусть A' и B' — инверсии точек A и B.

Повернем треугольник градиентов PFE на 90° по направлению возрастающих значений дирекционных углов; тогда точки F и E совместятся

с инверсиями A' и B'. Так как градиент $\overline{G}_\gamma$ угла γ перпендикулярен к линии положения угла γ — к касательной ab, то ясно, что при таком повороте новое направление градиента PO будет параллельно линии FE, а модуль градиента G_γ представится отрезком $A'B'$; величина его может быть найдена также по формуле

$$G_\gamma^2 = g_1^2 - 2g_1g_2\cos\gamma + g_2^2 \qquad (24)$$

или

$$G_\gamma^2 = \frac{1}{s_1^2} - \frac{2\cos\gamma}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_2^2}. \qquad (24)^*$$

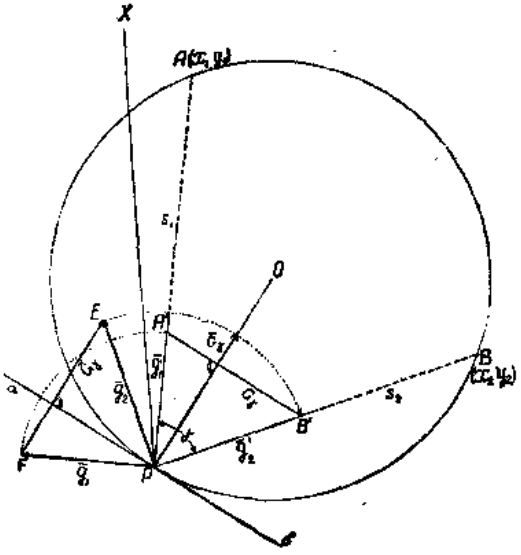

Рис. 15.

Пользоваться этими формулами на практике обычно не приходится, так как численная величина градиента G_γ угла γ легко может быть получена графически, с точностью, вполне отвечающей потребности.

Треугольник $PA'B'$ будем называть *инверсионным* треугольником угла γ.

При указанном построении градиентов g_2' и g_1' линия $A'B'$, соединяющая инверсии точек A и B, параллельна линии положения плоского угла, т. е. касательной ab к окружности ABP, вмещающей угол γ, а перпендикуляр к ней дает направление градиента $\overline{G}_\gamma$ угла γ. Построение графически линии положения угла γ поэтому делается таким образом. Вычисляем „счислимые" дирекционные углы α_c'' и α_c' по формулам

$$\operatorname{tg}\alpha_c'' = \frac{y_2 - y_c}{x_2 - x_c} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_c' = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c}$$

для координат x_c и y_c счислимой точки C. Разность $\alpha_c'' - \alpha_c' = \gamma_c$ дает счислимую величину γ_c для угла γ. Строим инверсионный треугольник

$A'B'C$ (рис. 16) и измеряем длину $A'B' = G_\gamma$. Через счислимую точку C проводим прямую перпендикулярно к $A'B'$ и по этому направлению откладываем отрезок CK, равный p, найдя величину его по формуле

$$p = \frac{\gamma - \gamma_c}{G_\gamma},$$

а через точку K проводим прямую ab, параллельную $A'B'$. Это и будет *линия положения* измеренного угла между точками A и B на плоскости.

Такой способ построения линий положения углов целесообразен, если число измеренных углов больше двух. При двух углах результаты получаются проще и скорее протрактором, по гониометрической сетке и даже вычислением координат с помощью одной из многочисленных систем формул, предложенных для решения задачи определения места по трем опорным пунктам. Изложенные же здесь соображения удобно применять для оценки точности определения места по двум углам, что будет сделано ниже.

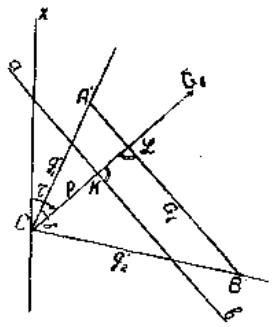

Рис. 16.

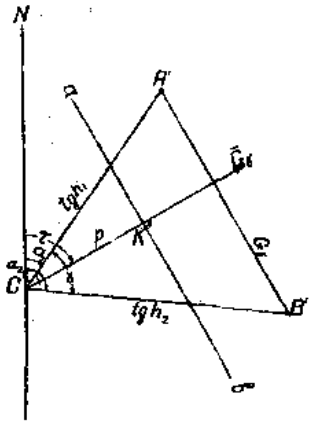

Рис. 17.

б) Задача на сфере

Угол γ на сфере представляет собой сферический угол между большими кругами, проходящими через точку P_0 и наблюдаемые A_0 и B_0. Следовательно, он равен разности направлений α_2 и α_1, считаемых от постоянного, но произвольного направления, т. е.

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Поэтому градиент $\overline{G}_\gamma$ сферического угла равен геометрической разности градиентов направлений на сфере. Так как (задача 5) величина градиента направления на сфере равна по (22) $\operatorname{ctg} z_c$ или $\operatorname{tg} h_c$, то модуль граднента G_γ может быть вычислен по формуле

$$(G_\gamma)^2 = \operatorname{tg}^2 h_1 - 2 \operatorname{tg} h_1 \operatorname{tg} h_2 \cos\gamma + \operatorname{tg}^2 h_2.$$

На основании сказанного выше графическое решение задачи делается так (рис. 17). На листе бумаги при произвольной точке C строим угол γ и на сторонах этого угла откладываем отрезки CA' и CB', равные в произвольном масштабе величинам $\operatorname{tg} h_1$ и $\operatorname{tg} h_2$.

Точки A' и B' соединяем прямой линией, которая в том же масштабе представит величину градиента G угла γ, а направление ее будет параллельно линии положения сферического угла γ. Поэтому перпендикуляр CK даст направление градиента угла.

Отстояние p от счислимой точки C до определяющей K будет равно

$$p = \frac{\gamma - \gamma_c}{G_\gamma} = \frac{(a_2 - a_1) - (a_c'' - a_c')}{G_\gamma}, \tag{25}$$

где угол $\gamma = a_c'' - a_c'$ есть счислимая величина измеренного угла, равная разности счислимых значений азимутов a_c'' и a_c'.

Пример 7. Градиент и линия положения азимута, измеренного при определяемой точке P на известную A.

Условимся здесь азимуты считать геодезически и обозначать их через a.

Очевидно, что если точку A в предыдущей задаче совместить с северным полюсом P_0, то градиент $\overline{g_0}$ направления на полюс расположится по параллели к точке W горизонта и абсолютная его величина по (22) окажется равной

$$g_0 = \operatorname{tg}\varphi, \tag{26}$$

а сферический угол γ обратится в азимут a. Поэтому градиент $\overline{G}_a$ азимута равен

$$\overline{G}_a = \overline{g} - \overline{g_0}, \tag{27}$$

где $\overline{g}$ есть градиент направления на визируемый предмет M. Графическое построение градиента $\overline{G}_a$ и азимутальной линии положения делается таким образом. На листе бумаги (рис. 18) принимаем произ-

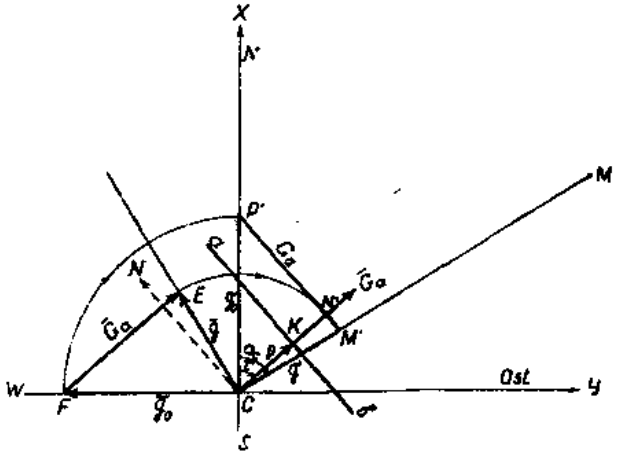

Рис. 18.

вольное направление CN за изображение меридиана и от точки C откладываем отрезок $CP' = \operatorname{tg}\varphi$ в произвольном масштабе; проводим линию CM' к меридиану под углом a_c и по этой линии в том же масштабе откладываем отрезок $CM' = \operatorname{tg} h_c = \operatorname{ctg} z_c$. Точки M' и P' соединяем прямой линией и получаем инверсионный треугольник $P'CM'$

$A'B'C$ (рис. 16) и измеряем длину $A'B' = G_\gamma$. Через счислимую точку C проводим прямую перпендикулярно к $A'B'$ и по этому направлению откладываем отрезок CK, равный p, найдя величину его по формуле

$$p = \frac{\gamma - \gamma_c}{G_\gamma},$$

а через точку K проводим прямую ab, параллельную $A'B'$. Это и будет линия положения измеренного угла между точками A и B на плоскости.

Такой способ построения линий положения углов целесообразен, если число измеренных углов больше двух. При двух углах результаты получаются проще и скорее протрактором, по гониометрической сетке и даже вычислением координат с помощью одной из многочисленных систем формул, предложенных для решения задачи определения места по трем опорным пунктам. Изложенные же здесь соображения удобно применять для оценки точности определения места по двум углам, что будет сделано ниже.

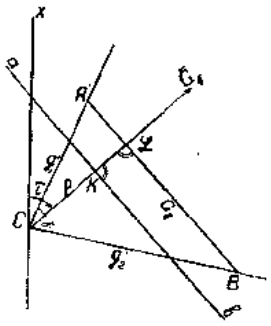

Рис. 16.

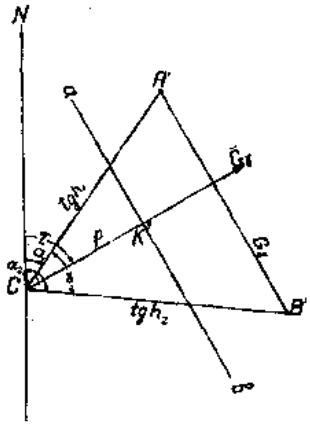

Рис. 17.

б) Задача на сфере

Угол γ на сфере представляет собой сферический угол между большими кругами, проходящими через точку P_0 и наблюдаемые A_0 и B_0. Следовательно, он равен разности направлений α_2 и α_1, считаемых от постоянного, но произвольного направления, т. е.

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Поэтому градиент $\overline{G}_\gamma$ сферического угла равен геометрической разности градиентов направлений на сфере. Так как (задача 5) величина градиента направления на сфере равна по (22) $\operatorname{ctg} z_c$ или $\operatorname{tg} h_c$, то модуль градиента G_γ может быть вычислен по формуле

$$(G_\gamma)^2 = \operatorname{tg}^2 h_1 - 2 \operatorname{tg} h_1 \operatorname{tg} h_2 \cos\gamma + \operatorname{tg}^2 h_2.$$

На основании сказанного выше графическое решение задачи делается так (рис. 17). На листе бумаги при произвольной точке C строим угол γ и на сторонах этого угла откладываем отрезки CA' и CB', равные в произвольном масштабе величинам $\operatorname{tg} h_1$ и $\operatorname{tg} h_2$.

Точки A' и B' соединяем прямой линией, которая в том же масштабе представит величину градиента G угла γ, а направление ее будет параллельно линии положения сферического угла γ. Поэтому перпендикуляр CK даст направление градиента угла.

Отстояние p от счислимой точки C до определяющей K будет равно

$$p = \frac{\gamma - \gamma_c}{G_\gamma} = \frac{(a_2 - a_1) - (a''_c - a'_c)}{G_\gamma}, \tag{25}$$

где угол $\gamma = a''_c - a'_c$ есть счислимая величина измеренного угла, равная разности счислимых значений азимутов a''_c и a'_c.

Пример 7. Градиент и линия положения азимута, измеренного при определяемой точке P на известную A.

Условимся здесь азимуты считать геодезически и обозначать их через a.

Очевидно, что если точку A в предыдущей задаче совместить с северным полюсом P_0, то градиент $\bar{g}_0$ направления на полюс расположится по параллели к точке W горизонта и абсолютная его величина по (22) окажется равной

$$g_0 = \operatorname{tg}\varphi, \tag{26}$$

а сферический угол γ обратится в азимут a. Поэтому градиент $\bar{G}_a$ азимута равен

$$\bar{G}_a = \bar{g} - \bar{g}_0, \tag{27}$$

где $\bar{g}$ есть градиент направления на визируемый предмет M. Графическое построение градиента $\bar{G}_a$ и азимутальной линии положения делается таким образом. На листе бумаги (рис. 18) принимаем произ-

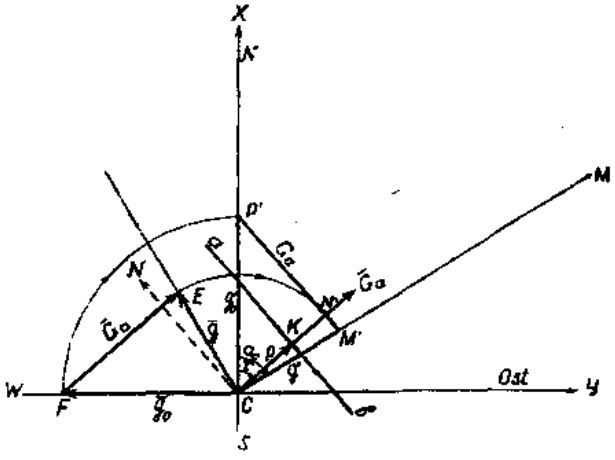

Рис. 18.

вольное направление CN за изображение меридиана и от точки C откладываем отрезок $CP' = \operatorname{tg}\varphi$ в произвольном масштабе; проводим линию CM' к меридиану под углом a_c и по этой линии в том же масштабе откладываем отрезок $CM' = \operatorname{tg} h_c = \operatorname{ctg} z_c$. Точки M' и P' соединяем прямой линией и получаем инверсионный треугольник $P'CM'$

азимута a. Сторона $P'M'$ равна численно градиенту G азимута, а направлена параллельно по азимутальной линии положения. Численно градиент G может быть найден по формуле

$$G_a^2 = \operatorname{tg}^2\varphi - 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}h\cos a_i + \operatorname{tg}^2 h. \qquad (28)$$

Формула (28) была получена выше, в примере 2, совершенно иным путем. Перпендикуляр CN' даст направление τ_c градиента азимута a в точке C.

По сказанному выше точки P' и M' представляют инверсии относительно точки C изображения полюса P_0 и точки M в какой-нибудь равноугольной проекции. Треугольник $CP'M'$ назовем инверсионным треугольником азимута a.

Азимутальная линия положения может быть построена, подобно линии угла, таким приемом: по перпендикуляру к линии $P'M'$ откладываем отрезок CK, равный p:

$$p = \frac{a - a_c}{G_a},$$

и через точку K проводим прямую ab параллельно $P'M'$ или перпендикулярно градиенту G_a азимута.

Сравнивая этот прием с указанным в примере 2, легко видеть, что здесь графических действий больше, чем в первом; вычисление азимута a_c одинаково необходимо в обоих приемах.

§ 4. Эллипсы ошибок

Оценка точности определения положения точки P производится следующим путем. Пусть I и II — линии положения, которые в пересечении определяют искомое место точки P (рис. 19). Всякая случайная индивидуальная ошибка du_1 измерения функции u_1 повлечет параллельное смещение первой линии положения на величину $dp_1 = PH'$; вследствие этого положение точки P переместится из P в B по второй линии положения на величину $PB = x$. Подобным же образом индивидуальная случайная ошибка du_2 второй функции u_2 повлечет за собой перемещение точки P по первой линии положения на величину $y = PC$ в точку C. Так как эти ошибки независимы и действуют совместно, то полное перемещение точки P даст вектор $\overline{\Delta} = PR$, представляющий собой геометрическую сумму перемещений x и y. Ошибки du_1 и du_2 могут быть и положительные и отрицательные, а тогда перемещения точки P по обеим линиям положения представят собой так называемые *векториальные ошибки*, действующие в ту или другую сторону только по определенным и фиксированным в данном вопросе осям, которые и будут именно линии положения I и II. Сложение этих векториальных ошибок будет вызывать смещения, направления которых вокруг точки P

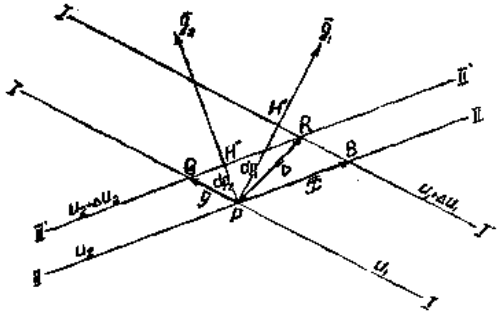

Рис. 19.

могут быть какие угодно. Мерой точности результатов всяких измерений служат средние квадратические ошибки наблюдений или измерений, поэтому, обозначая через ε_1 и ε_2 средние квадратические ошибки измерения функций u_1 и u_2 и соответствующие им средние квадратические величины параллельных перемещений линии положения через ε_{p_1} и ε_{p_2}, получим на основании формулы (15):

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{\pm \varepsilon_1}{g_1}; \qquad \varepsilon_{p_2} = \frac{\pm \varepsilon_2}{g_2}. \tag{29}$$

Соответственно средним квадратически величинам параллельных перемещений линий положений ε_{p_1} и ε_{p_2} получаются средние квадратические векториальные ошибки места точки P по обеим линиям положения, т. е. величины $\overleftarrow{m}$ и $\overleftarrow{n}$, которые мы будем отмечать двойными стрелками и модули которых равны (рис. 20)

$$m = \frac{\varepsilon_{p_1}}{\sin\theta} = \frac{\varepsilon_2}{g_2 \sin\theta} \qquad \text{и} \qquad n = \frac{\varepsilon_{p_2}}{\sin\theta} = \frac{\varepsilon_1}{g_1 \sin\theta}. \tag{30}$$

Условимся буквой m обозначать бо́льшую из векториальных ошибок.

Сложение векториальных ошибок производится не геометрически, как векторных, и не квадратически, как скалярных ошибок. Оно приводит к совокупности ошибок, расположенных вокруг точки P и характерных тем, что равновероятные смещения, обусловленные этими ошибками, ограничены эллипсами, имеющими центр в точке P. Сопряженные оси этих эллипсов совпадают с направлениями действия векториальных ошибок. Чем больше полуоси избранного эллипса, тем больше вероятность того, что действительное место определяемой точки P лежит внутри этого эллипса. Ввиду того что указанные эллипсы определяют зависимость величины равновероятных ошибок от направления, их называют *эллипсами ошибок*, а всю совокупность ошибок, к которым приводит сложение двух векториальных, иногда сокращенно называют *эллиптической ошибкой*.

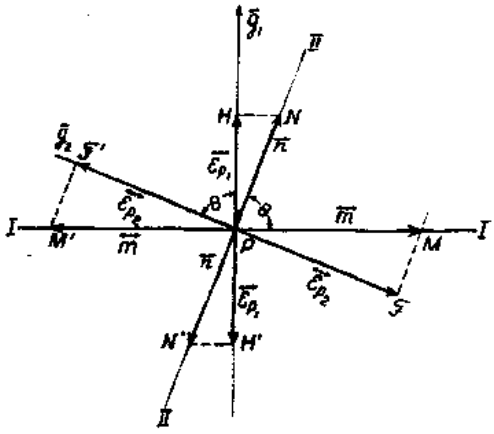

Рис. 20.

Тот эллипс ошибок, сопряженные полудиаметры которого по величине и направлению совпадают с векториальными ошибками $\overleftarrow{m}$ и $\overleftarrow{n}$, называют *средним* эллипсом ошибок, но вероятность того, что определяемая точка P лежит внутри среднего эллипса, составляет всего $0{,}39 \approx \frac{2}{5}$.

Пользуются также другими эллипсами ошибок. Если увеличить полуоси среднего эллипса в $\sqrt{\ln 4} = 1{,}1774...$ раз, то получим эллипс ошибок, называемый *вероятным*. Для такого эллипса вероятности нахождения точки внутри или вне его одинаковы и равны 0,5. В артил-

лерии применяют *единичный* эллипс с полуосями, равными 0,6745 от полуосей среднего. Все эллипсы ошибок имеют одинаковые эксцентриситеты.

Рис. 20 показывает, что *средние квадратические величины параллельных перемещений линий положения* ε_{p_1} *и* ε_{p_2} *представляют собой проекции векториальных ошибок* $\overleftarrow{m}$ *и* $\overleftarrow{n}$ *на направления градиентов* $\overrightarrow{g_1}$ *и* $\overrightarrow{g_2}$.

Эта общая теорема дает простой способ нахождения векториальных ошибок, по которым элементы эллипса ошибок определяются просто.

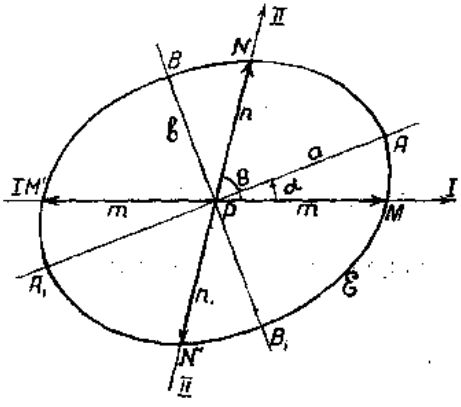

Рис. 21.

Форма и расположение среднего эллипса ошибок характеризуют точность определения положения точки P. Очевидно, что в направлении большой оси AA_1 положение точки P определяется хуже, а в направлении малой оси BB_1 лучше (рис. 21).

Таким образом, для полной характеристики точности определения положения точки P надо найти размеры большой a и малой b полуосей эллипса ошибок и направление их. Направление большей полуоси AA_1 определяется меньшим чем 45° положительным углом α между нею и *большей векториальной ошибкой* m. Этот угол откладывается от направления m в сторону n, внутри острого угла θ между m и n. Для вычисления угла α служит формула:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\varkappa^2 \sin 2\theta}{1 + \varkappa^2 \cos 2\theta}, \tag{31}$$

где

$$\varkappa = \frac{n}{m} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\frac{g_2}{g_1} < 1,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\theta}{\lambda^2 + \cos 2\theta}, \tag{31*}$$

где

$$\lambda = \frac{m}{n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,\frac{g_1}{g_2} > 1.$$

Для определения размеров полуосей a и b среднего эллипса ошибок можно пользоваться одной из следующих систем формул, представляющих собой следствия известных теорем Аполлония (Справочник, вып. 1, отд. I, гл. 5, § 7, форм. 15):

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2; \qquad ab = mn \sin\theta.$$

Как сказано выше, θ есть угол между линиями положения или между градиентами соответствующих функций u_1 и u_2:

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= m^2 + 2mn\sin\theta + n^2\\ (a-b)^2 &= m^2 - 2mn\sin\theta + n^2\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$a^2 = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) + \frac{1}{2}\sqrt{m^4 + 2m^2n^2\cos 2\theta + n^4}$$
$$b^2 = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) - \frac{1}{2}\sqrt{m^4 + 2m^2n^2\cos 2\theta + n^4} \qquad (32)^*$$

или

$$a = m\sqrt{1 + \varkappa^2}\cos\left(45° - \frac{T}{2}\right) = n\sqrt{1 + \lambda^2}\cos\left(45° - \frac{T}{2}\right)$$
$$b = m\sqrt{1 + \varkappa^2}\sin\left(45° - \frac{T}{2}\right) = n\sqrt{1 + \lambda^2}\sin\left(45° - \frac{T}{2}\right) \qquad (32)^{**}$$

где

$$\cos T = \frac{2\varkappa}{1 + \varkappa^2}\sin\theta = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}\sin\theta.$$

Круговая ошибка. В том частном случае, когда $m = n$ и $\theta = 90°$, тогда и $a = b$, а эллипс обращается в круг, и получается так называемая круговая ошибка; в других случаях круговой ошибки, строго говоря, не может быть.

Пример 8. Оценка точности определения места корабля по двум пеленгам методом эллиптических ошибок.

Предметы R и Q находятся от наблюдателя в 12 и 9 милях; пеленги истинные, определенные по компасу, равны 30° и 85°. Средние квадратические ошибки наблюдений обоих пеленгов одинаковы и равны $\pm 1/4° = \pm 15'$. Найти элементы среднего эллипса ошибок и построить его (рис. 22), решая задачу на плоскости. Выражая параллельные смещения линий положения и векториальные ошибки в кабельтовах, находим последовательно

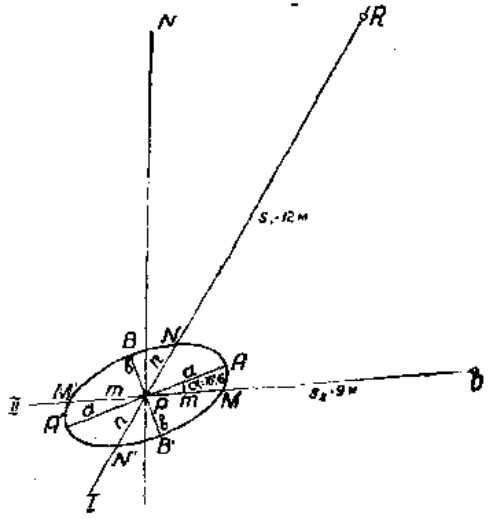

Рис. 22.

$$g_1 = \frac{1}{120}, \quad g_2 = \frac{1}{90};$$

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{\varepsilon_1}{g_1} = \pm\frac{1 \times 120}{4 \times 57{,}3} = \frac{\pm 120}{229{,}2} = \pm 0{,}52 \text{ каб.},$$

$$\varepsilon_{p_2} = \pm\frac{\varepsilon_2}{g_2} = \pm\frac{1 \times 90}{4 \times 57{,}3} = \frac{90}{229{,}2} = 0{,}39 \text{ каб.};$$

$$m = \frac{\pm 0{,}52}{\sin\theta} = \frac{\pm 0{,}52}{\sin 55°} = \frac{\pm 0{,}52}{0{,}819} = \pm 0{,}64 \text{ каб.} \quad \text{(по II линии)}$$

$$n = \frac{\pm 0{,}39}{\sin\theta} = \frac{\pm 0{,}39}{\sin 55°} = \frac{\pm 0{,}39}{0{,}819} = \pm 0{,}48 \text{ каб.} \quad \text{(по I линии)}$$

$$\lambda = \frac{0{,}64}{0{,}48} = \frac{0{,}52}{0{,}39} = \frac{120}{90} = 1{,}333.$$

Направление большой оси

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 110^\circ}{(1{,}333)^2 + \cos 110^\circ} = \frac{0{,}940}{1{,}777 - 0{,}342} = \frac{0{,}940}{1{,}435} = 0{,}655;$$

$$2\alpha = 33^\circ{,}2; \quad \alpha = 16^\circ{,}6.$$

II линия положения $(Pa) = 85^\circ$; $\alpha = 16^\circ{,}6$.

Направление большой оси = 68°,4 (248°,4);

„ малой „ = 158°,4 (338°,4).

Величины полуосей:

$$\cos T = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \sin \theta = \frac{2 \times 1{,}333}{1 \times 1{,}777}\, 0{,}819 = 0{,}960 \times 0{,}819 = 0{,}786;$$

$$T = 38^\circ{,}1, \quad \frac{T}{2} = 19^\circ{,}05, \quad 45^\circ - \frac{T}{2} = 25^\circ{,}95;$$

$$n\sqrt{1+\lambda^2} = 0{,}48\sqrt{2{,}777} = 0{,}48 \times 1{,}66 = 0{,}800;$$

$$a = 0{,}800 \cos 25^\circ{,}95 = 0{,}800 \times 0{,}899 = 0{,}72 \text{ каб.};$$

$$b = 0{,}800 \sin 25^\circ{,}95 = 0{,}800 \times 0{,}438 = 0{,}35 \text{ каб.}$$

На рис. 22 показан в масштабе 1 *см* = 0,6 каб. эллипс ошибок, ориентированный относительно визируемых направлений. На рис. 23 показан тот же эллипс в масштабе 0,02 каб. = 1 *мм*. Из рис. 23 видно, какая геометрическая зависимость существует между средними квадратическими величинами параллельных перемещений линий положений ε_{p_1} и ε_{p_2} и векторциальными ошибками m и n.

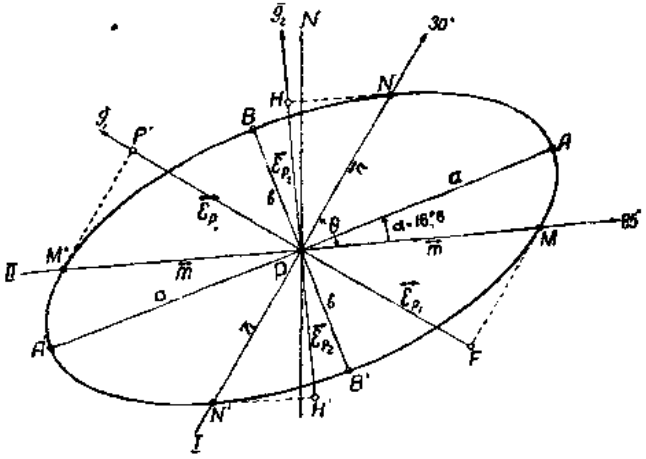

Рис. 23.

Из примера видно, каким образом получаются величины сопряженных полудиаметров m и n, которыми и определяются остальные элементы среднего эллипса ошибок и его ориентировка относительно направлений на визируемые предметы.

Во всех случаях двух наблюдений (двух линий положений) путь действия одинаков независимо от характера задачи.

§ 5. Средние квадратические ошибки координат определяемой точки

Определение элементов и построение среднего эллипса ошибок может потребовать значительного труда и времени, а потому чаще ограничиваются определением средних квадратических ошибок координат определенной точки, что значительно проще.

Так как уравнения обеих линий положения имеют вид:

$$\Delta x \cos \tau_1 + \Delta y \sin \tau_1 = p_1;$$
$$\Delta x \cos \tau_2 + \Delta y \sin \tau_2 = p_2,$$

то, решив их относительно Δx и Δy, получим

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{p_1 \sin \tau_2 - p_2 \sin \tau_1}{\sin(\tau_2 - \tau_1)} \\ \Delta y &= \frac{-p_1 \cos \tau_2 + p_2 \cos \tau_1}{\sin(\tau_2 - \tau_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Заменяя p_1 и p_2 их значениями по формуле (11)

$$p_1 = \frac{u_1 - u_c'}{g_1} = \frac{\Delta u_1}{g_1}; \quad p_2 = \frac{u_2 - u_c''}{g_2} = \frac{\Delta u_2}{g_2},$$

получим поправки Δx и Δy к приближенным значениям координат x_c и y_c в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{g_2 \Delta u_1 \sin \tau_2 - g_1 \Delta u_2 \sin \tau_1}{g_1 g_2 \sin(\tau_2 - \tau_1)} \\ \Delta y &= \frac{-g_2 \Delta u_1 \cos \tau_2 + g_1 \Delta u_2 \cos \tau_1}{g_1 g_2 \sin(\tau_2 - \tau_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (33)^*$$

где для краткости письма разности $u_1 - u_c'$ и $u_2 - u_c''$ обозначены через Δu_1 и Δu_2. Средние квадратические ошибки координат ε_x и ε_y через средние квадратические ошибки ε_1 и ε_2 измерений (наблюдений) функций u_1 и u_2 выражаются такими общими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^2 &= \frac{\varepsilon_1^2 g_2^2 \sin^2 \tau_2 + \varepsilon_2^2 g_1^2 \sin^2 \tau_1}{g_1^2 g_2^2 \sin^2(\tau_2 - \tau_1)} \\ \varepsilon_y^2 &= \frac{\varepsilon_1^2 g_2^2 \cos^2 \tau_2 + \varepsilon_2^2 g_1^2 \cos^2 \tau_1}{g_1^2 g_2^2 \sin^2(\tau_2 - \tau_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

По этим формулам могут быть вычислены средние квадратические ошибки координат x и y точки, найденной в пересечении двух линий положения. При этом считается, что случайные ошибки наблюденных (измеренных) величин u_1 и u_2 независимы.

Из формул (34) и из геометрического рассмотрения вопроса ясно, что наименьшие средние ошибки ε_x и ε_y координат при прочих равных условиях будут при $\tau_2 - \tau_1 = \pm 90°$; при этом предполагается, что никаких систематических, постоянных или повторяющихся ошибок измеренные величины u_1 и u_2 не заключают.

При двух наблюдениях, даже в случае одинаковых постоянных ошибок, равных каждая δ в измеренных значениях функций u_1 и u_2, исключить влияние этой ошибки на определяемое положение точки невозможно, так как в этом случае задача сведется к определению трех неизвестных: x, y и δ, из двух уравнений. Наличие постоянных ошибок в величинах u_1 и u_2 является причиной того, что действительные

ошибки в координатах точки могут превосходить предвычисленные средние ошибки координат, даваемые формулами (34) чаще, чем это требует теория вероятностей.

Связь между эллиптической ошибкой и ошибками координат ε_x и ε_y (рис. 24) устанавливается следующим образом.

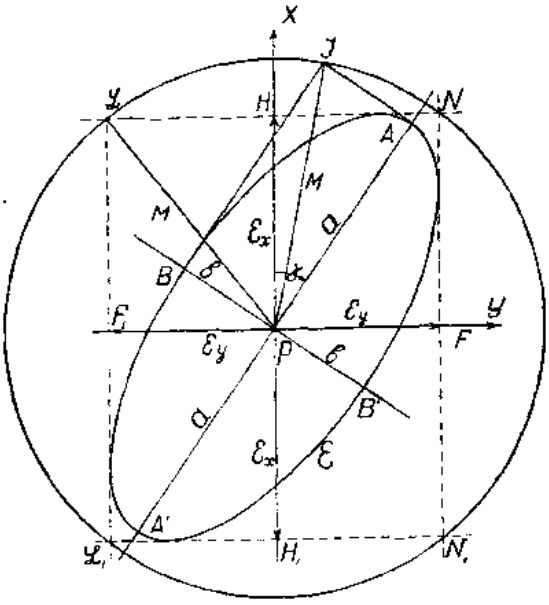

Рис. 24.

Пусть P есть точка, определенная в пересечении двух независимых линий положения, и e есть средний эллипс ошибок, характеризующий точность этого определения, построенный, как сказано в § 4.

Проведем касательные LN и L_1N_1 к эллипсу параллельно оси $\overline{Y}$ и LL_1 и NN_1 параллельно оси $\overline{X}$, тогда отрезки на осях координат будут:

$$PH = PH_1 = \varepsilon_x;$$
$$PF = PF_1 = \varepsilon_y.$$

Так как отрезки PH и PF суть длины перпендикуляров, опущенных из P на касательные LN и LL_1, то, обозначив через γ угол между большой осью эллипса и осью X (Справочник, вып. 1, отд. I, гл. 5, § 4, форм. (18)*, найдем:

$$\varepsilon_x^2 = a^2 \cos^2\gamma + b^2 \sin^2\gamma; \qquad (35)$$
$$\varepsilon_y^2 = a^2 \sin^2\gamma + b^2 \cos^2\gamma. \qquad (36)$$

Эти величины будут в точности равны тем, которые получаются по формулам (34).

В теории эллиптических ошибок величины ε_x и ε_y называют ***средними квадратическими отклонениями от осей координат***, которые вызываются данной эллиптической ошибкой.

§ 6. Средняя квадратическая ошибка положения точки

А. Определение средней квадратической ошибки положения точки

Вместо эллипсов ошибок для приближенной оценки точности положения точки применяют еще так называемую *среднюю (квадратическую) ошибку* положения точки, обычно обозначаемую M. Эта величина определяется формулой

$$M = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}\,. \tag{37}$$

Если сложить выражения (34), то получим, положив для краткости $\tau_2 - \tau_1 = \theta$:

$$M = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 g_2^2 + \varepsilon_2^2 g_1^2}{g_1^2 g_2^2 \sin^2\theta}} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{g_1^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{g_2^2}}\,. \tag{38}$$

Если же воспользоваться формулой (14), то получим:

$$M = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\varepsilon_{p_1}^2 + \varepsilon_{p_2}^2}, \tag{38}*$$

где ε_{p_1} и ε_{p_2} представляют собой средние квадратические величины параллельных перемещений обеих линий положения.

С другой стороны, сумма выражений (35) и (36) дает:

$$M = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким же образом сумма квадратов выражений (30) дает:

$$M = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{g_1^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{g_2^2}} = \sqrt{m^2 + n^2}\,.$$

Поэтому выходит, что

$$M = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\varepsilon_{p_1}^2 + \varepsilon_{p_2}^2}, \tag{39}$$

т. е. квадрат общей средней ошибки M положения точки равен сумме квадратов сопряженных полудиаметров или сумме квадратов главных полуосей среднего эллипса ошибок. На рис. 24 ввдна указанная связь между эллиптической ошибкой и общей ошибкой M. Отсюда также видно, что эллипс ошибок $\mathcal{E}$ полностью помещается внутри круга радиуса M. Как показывают формулы (39), величина M не зависят от ориентировки осей координат.

Величина M дает менее полное представление о точности определения положения точки на плоскости, чем средний эллипс ошибок.

Причина этого заключается в том, что меру точности положения точки на плоскости выразить одним числом M невозможно, так как в этом случае она определяется тремя числами — двумя полуосями и направлением большой оси эллипса ошибок. Но вследствие простоты и удобства, тем не менее, формулы (38) и (38)* широко применяются в геодезии, гидрографии и навигации. В тех случаях, когда полуоси эллипса ошибок разнятся незначительно, удобно рассматривать *приближенную круговую ошибку*, определяя радиус R этого круга по формуле

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2}} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{g_1^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{g_2^2}\right)}. \tag{40}$$

Когда градиенты $g_1 = g_2 = 1$, то

$$R = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{p_1}^2 + \varepsilon_{p_2}^2\right)}. \qquad (40)^*$$

Очевидно, что

$$R = \frac{M}{\sqrt{2}} = 0{,}707M. \qquad (41)$$

Положительная сторона формулы (40) заключается в том, что в частном случае, когда $a = b$ и, следовательно, $\theta = 90°$, должна быть круговая ошибка, и в этом случае, действительно, получаем из формулы (40), что $R = a$, а формула (37) дает $M = a\sqrt{2}$, т. е. средняя ошибка M положения точки не есть радиус того круга погрешности, в который обращается средний эллипс ошибок при $a = b$.

Б. Средняя квадратическая ошибка M положения точки, определенной по двум наблюдениям

Пусть точка P (рис. 25) определена по двум направлениям; тогда для оценки точности найденного положения, не пользуясь методом эллиптических ошибок, применим метод градиентов, изложенный в примере 5. Построим инверсии A' и B' наблюдаемых точек A и B, для чего от точки P отложим по линиям PA и PB отрезки

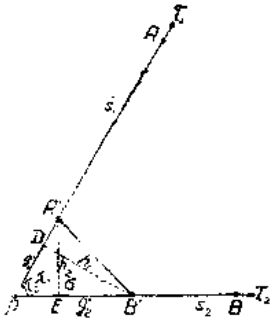

Рис. 25.

$$PA' = g_1' = \frac{k}{s_1} \quad \text{и} \quad PB' = g_2' = \frac{k}{s_2},$$

где k — произвольная длина, при которой отрезки g_1' и g_2' получают значения, удобные для графических построений на карте или на листе бумаги. Соединим точки A' и B' прямой линией и рассмотрим инверсионный треугольник $PA'B'$, который, по изложенному в примере 6, представляет собой треугольник градиента угла $(\tau_2 - \tau_1)$, но повернутый на 90° в положительном направлении. Согласно формулам (34), § 5, гл. 2, средние ошибки координат точки P будут равны

$$\varepsilon_x^2 = \frac{\varepsilon_1^2 g_2^2 \sin^2\tau_2 + \varepsilon_2^2 g_1^2 \sin^2\tau_1}{g_1^2 g_2^2 \sin^2(\tau_2 - \tau_1)}; \qquad \varepsilon_y^2 = \frac{\varepsilon_1^2 g_2^2 \cos^2\tau_2 + \varepsilon_2^2 g_1^2 \cos^2\tau_1}{g_1^2 g_2^2 \sin^2(\tau_2 - \tau_1)}.$$

По сказанному выше, средняя квадратическая ошибка положения точки равна:

$$M = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}.$$

Применяя эту формулу в настоящей задаче, получим

$$M^2 = \frac{\varepsilon_1^2 g_2^2 + \varepsilon_2^2 g_1^2}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon_1^2 g_2^2}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon_2^2 g_2^2}{\sigma^2}, \qquad (42)$$

где $\sigma = g_1 g_2 \sin(\tau_1 - \tau_2)$ есть удвоенная площадь инверсионного треугольника $PA'B'$ (рис. 25), равная удвоенной площади треугольника

градиентов $P\overrightarrow{g_1}\overrightarrow{g_2}$, если измерить ее единицами, соответствующими тем линейным мерам, которыми измеряют градиенты.

Но с другой стороны, опустив перпендикуляры $h_1 = B'D$ на первую сторону s_1 из точки B' и $h_2 = A'E$ на вторую из точки A', легко понять, что $\sigma = g_1'h_1 = g_2'h_2$, и, подставляя эти выражения в предыдущую формулу, найдем формулу

$$M^2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2'}{h_1}\right)^2, \qquad (43)$$

предложенную проф. В. В. Каврайским, которая удобна для определения величины M тем, что позволяет решать задачу графически.

Пример 9. Пользуясь данными примера 8, найти среднюю ошибку M положения точки, определенной по двум пеленгам. Возьмем формулу (38)*

$$M = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\varepsilon_{p_1}^2 + \varepsilon_{p_2}^2},$$

$$\varepsilon_{p_1} = 120 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{57{,}3} = \frac{120 \text{ каб.}}{229{,}2} = 0{,}52 \text{ каб.}; \quad \varepsilon_{p_2} = \frac{90}{229{,}2} = 0{,}39 \text{ каб.}$$

и простейшим образом найдем:

$$M = 1{,}22\sqrt{(0{,}52)^2 + (0{,}39)^2} = 1{,}22\sqrt{0{,}4309} = 1{,}22 \cdot 0{,}656 = 0{,}80 \text{ каб.}$$

Применяя формулу (43), сначала строим с помощью транспортира при произвольной точке O (рис. 26) угол $\theta = 55°$ и совершенно произвольно принимаем, что $OA' = g_1 = 5$ *см* $= 0{,}05$ *м*, тогда из условия $0{,}05\ м = \frac{k}{120}$ получаем, что условная единица k градиентов (рис. 26) равна: $k = 6$ *см*, т. е. отрезок в 6 *см* на рис. 26 соответствует градиенту направления в 1 радиан на 1 кабельтов.

После этого строим инверсию B' точки B, откладывая от начала O длину

$$OB' = g_2 = \frac{6}{90} = 0{,}067\ м = 6{,}7\ см.$$

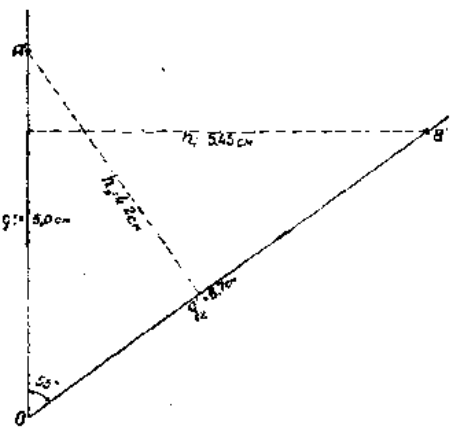

Рис. 26.

Из точки B' опускаем перпендикуляр на линию OA', а из A' перпендикуляр на линию OB' и, измерив в сантиметрах длины этих перпендикуляров, найдем $h_1 = 5{,}45$ *см* и $h_2 = 4{,}15$ *см*. Тогда формула (43) даст

$$M = \frac{6}{229{,}2}\sqrt{\left(\frac{1}{0{,}0545}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}0415}\right)^2} = \frac{6}{229{,}2}\sqrt{336{,}7 + 594{,}8} = 0{,}80 \text{ каб.}$$

В. Средняя квадратическая ошибка положения точки, определенной по двум углам

Формулы настоящего параграфа с весьма малыми видоизменениями дают ответ на вопрос о средней ошибке точки, определенной по двум углам между тремя предметами, если углы измеряют независимо один от другого, например секстаном.

В этом случае градиенты $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ углов γ_1 и γ_2 (рис. 27) направлены к центрам O_1 и O_2 вмещающих окружностей, а касательные

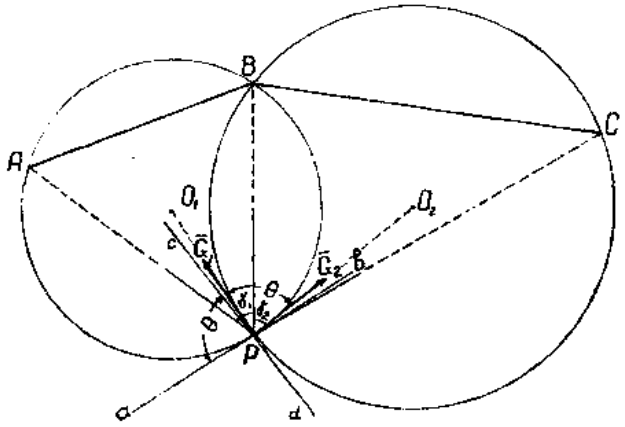

Рис. 27.

к последним ab и cd, перпендикулярные к градиентам, будут линии положения, соответствующие измеренным углам γ_1 и γ_2. Для наглядного суждения о качестве определения будет служить угол θ между линиями положения или градиентами: чем угол θ ближе к 90°, тем точнее будут определены координаты при тех же значениях градиентов. При употреблении гониометрических сеток это видно непосредственно. Если положение точки P определяют вычислением или протрактором, то надо построить инверсии A', B' и C' наблюдаемых пунктов A, B и C на карте или на листе бумаги (рис. 28), и так как линии $A'B'$ и $B'C'$, по изложенному в примере 6, параллельны соответствующим линиям положения, то угол между ними как раз будет равен углу θ между вмещающими окружностями.

Для определения средней ошибки M стоит только в формулах (34) и (42) заменить

$$g_1 \text{ на } G_1, \quad \tau_1 \text{ на } T_1,$$
$$g_2 \text{ на } G_2, \quad \tau_2 \text{ на } T_2,$$

где T_1 и T_2 — направления градиентов G_1 и G_2, тогда вместо (42) получим

$$M^2 = \frac{\varepsilon_1^2 G_2^2}{\Sigma^2} + \frac{\varepsilon_2^2 G_1^2}{\Sigma^2}, \qquad (*)$$

где Σ есть удвоенная площадь инверсионного треугольника $A'B'C'$ (рис. 28). Так как $\Sigma = h_1 G_2 = h_3 G_1$, то получим формулу

$$M = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{h_3}\right)^2}, \qquad (44)$$

предложенную проф. Каврайским.

Здесь $h_1 = A'L$ и $h_3 = C'M$ — высоты инверсионного треугольника $A'B'C'$, опущенные из точек A' и C' на стороны $B'C'$ и $A'B'$.

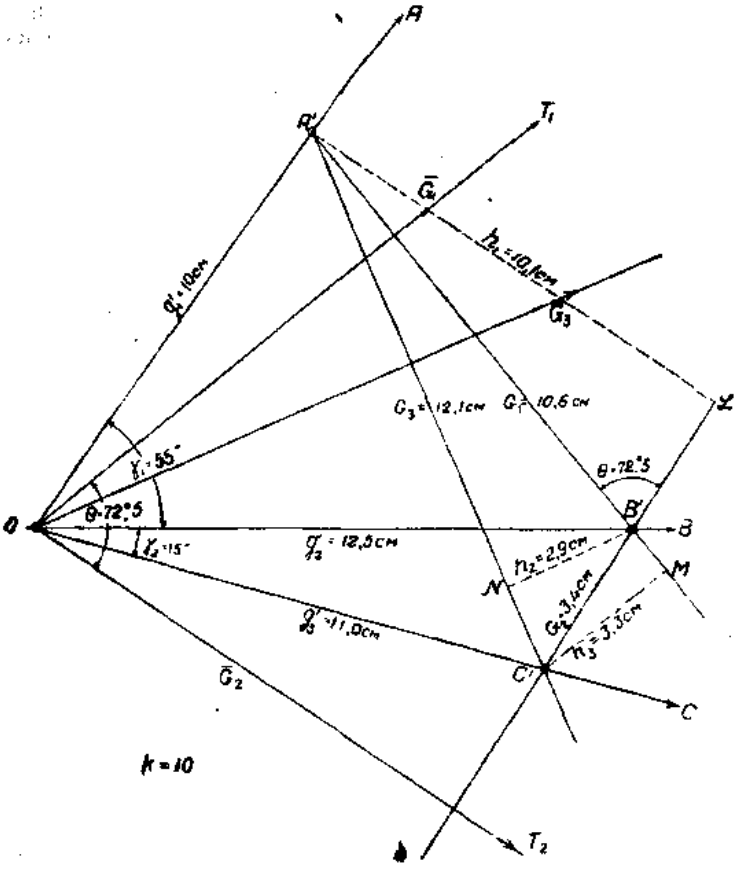

Рис. 28.

Отсюда видно, что при определении места по двум углам выгодно выбирать такие точки, для которых высоты инверсионных треугольников получаем наибольшие. Если заметить, что $\Sigma = G_1 G_2 \sin(T_2 - T_1)$, то, заменяя в формуле (*) Σ этим значением, получим другое выражение для M:

$$M = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{G_1}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{G_2}\right)^2}, \qquad (44)^*$$

где для краткости обозначено $T_2 - T_1 = \theta$, а G_1 и G_2 — модули градиентов углов $APB = \gamma_1$ и $BPC = \gamma_2$, соответственно равные сторонам $A'B'$ и $B'C'$ инверсионного треугольника $A'B'C'$.

Пример 10. Измерены секстаном два угла: $\gamma_1 = APB = 55°$ и $\gamma_2 = BPC = 15°$.

Расстояния до предметов соответственно равны: $PA = S_1 = 10$ миль, $PB = S_2 = 8$ миль, $PC = S_3 = 9{,}1$ мили. Определить среднюю ошибку M положения точки, считая, что средняя квадратическая ошибка измерения углов $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1'{,}5$. На листе бумаги (рис. 28) при произвольной точке O проводим прямые OA, OB и OC под углами $\gamma_1 = 55°$ и $\gamma_2 = 15°$, пользуясь транспортиром. На стороне OA назначаем произвольно точку A' — инверсию точки A, приняв $OA' = 10\ см = 0{,}1\ м$. Согласно предыдущему примеру находим, что $k = 10$. Поэтому инверсии B' и C' находим на сторонах OB и OC, отложив от точки O длины

$$OB' = \frac{10}{80} = 0{,}125\ м = 12{,}5\ см, \quad OC' = \frac{10}{9{,}1} = 0{,}110\ м = 11{,}0\ см.$$

Точки A', B' и C' соединим и получим инверсионный треугольник $A'B'C'$, стороны которого равны градиентам соответственных углов. Опускаем перпендикуляры $A'L = h_1 = 10{,}1\ см = 0{,}101\ м$ и $C'M = h_2 = 3{,}3\ см = 0{,}033\ м$ (рис. 28). После этого формула (44) даст непосредственно в кабельтовах (умножая правую часть на 10)

$$M = \frac{10 \times 1'{,}5}{3438} \sqrt{\left(\frac{1}{0{,}101}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}033}\right)^2} = \frac{15}{3438} \sqrt{98{,}0 + 918{,}3} =$$

$$= \frac{\sqrt{1016.3}}{229{,}2} = 0{,}14\ \text{каб.} = 26\ м.$$

По формуле (44)* получим сначала с рис. 28, что $G_1 = 10{,}6\ см = 0{,}106\ м$, $G_2 = 3{,}4\ см = 0{,}034\ м$ и $\theta = 72°{,}5$, а потому

$$M = \frac{10 \times 1'{,}5}{3438 \sin 72°{,}5} \sqrt{\left(\frac{1}{0{,}106}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}034}\right)^2} = \frac{1{,}049}{229{,}2} \sqrt{89{,}0 + 865{,}0} =$$

$$= \frac{1{,}049 \times 30{,}89}{229{,}2} = 0{,}14\ \text{каб.} = 26\ м.$$

Если не пользоваться графическими построениями, то формула (40) для данной задачи дает два выражения M:

$$M = \frac{\varepsilon}{\sin\theta} \sqrt{\left(\frac{z_1}{\sin\gamma_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\sin\gamma_2}\right)^2} = \frac{\varepsilon s_2}{\sin\theta} \sqrt{\left(\frac{s_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{s_3}{d_2}\right)^2}. \qquad (45)$$

Для применения этих выражений надо на карте измерить длины перпендикуляров z_1 и z_2, опущенных из определенной точки P на линии AB и BC, или для второго выражения измерить расстояния $d_1 = AB$ и $d_2 = BC$ между опорными точками A, B и C; кроме того, надо транспортиром измерить угол ABC при среднем пункте B, который для краткости обозначим через B. Тогда угол θ между линиями положения (окружностями) или градиентами $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$ равен

$$\theta = 360° - (B + \gamma_1 + \gamma_2). \qquad (46)$$

Измерения на карте дают для данного примера:

$$d_1 = 85{,}0 \text{ каб.}; \quad d_2 = 24{,}7 \text{ каб.}; \quad z_1 = 77{,}1 \text{ каб.}; \quad z_2 = 75{,}9 \text{ каб.};$$
$$\angle B = 183°{,}1; \quad \theta = 73°{,}1,$$

поэтому формулы (45) дают

$$M = \frac{1'{,}5}{3438 \sin 73°{,}1} \sqrt{\left(\frac{77{,}1}{\sin 55°}\right)^2 + \left(\frac{75{,}9}{\sin 15°}\right)^2} = 0{,}14 \text{ каб.} = 26 \text{ м};$$

$$M = \frac{1'{,}5 \cdot 80}{3438 \sin 73°{,}1} \sqrt{\left(\frac{100}{85}\right)^2 + \left(\frac{91{,}0}{24{,}7}\right)^2} = 0{,}14 \text{ каб.} = 26 \text{ м}.$$

§ 7. Средняя квадратическая ошибка M положения точки, определенной по трем наблюдениям, при наличии добавочной неизвестной

В практических применениях эта общая задача представит собой следующие частные и обычно встречающиеся вопросы.

1. Обратная засечка на плоскости *при измерении направлений, а не углов*, причем направления можно измерить теодолитом по горизонтальному кругу или по картушке компаса, наблюдая компасные направления. Добавочной неизвестной при измерении направлений будет, очевидно, отсчет начального направления (оси X) на горизонтальном круге, а при наблюдении по компасу — взятая с обратным знаком общая поправка компаса, равная алгебраической сумме склонения магнитной стрелки в данном месте в данное время и девиации на данном курсе.

2. Измерение высот трех светил в море при наличии ошибки в принимаемом наклонении горизонта. Ясно, что ошибкой принимаемого теоретически наклонения горизонта и будет в этом случае третья (добавочная) неизвестная.

3. Наблюдены моменты прохождения трех звезд через один и тот же альмукантарат, высота которого известна лишь приближенно; тогда, кроме широты и долготы, третьей добавочной неизвестной будет поправка к приближенной высоте альмукантарата.

4. Определение места по трем опорным пунктам на сфера, т. е. определение места наблюдателя, который в известный момент по гринвичскому времени измерил подходящим инструментом горизонтальные направления на три звезды или определил три радиопеленга по судовому приемнику на отдаленные радиостанции.

А. Обозначим через v_1, v_2 и v_3 независимые результаты наблюдений, через u_1, u_2 и u_3 функции координат точки, вид которых определяется характером задачи, а через z ту добавочную неизвестную, которая подлежит определению. Как видно, в этом случае неизвестных столько же, сколько наблюдений (уравнений), и, решая задачу методом линий положений, придется применить или обыкновенные алгебраические методы решения трех линейных уравнений с тремя неизвестными, или графические приемы, которые скорее приведут к цели.

Здесь мы ограничимся вопросом о точности определения координат и добавочной неизвестной независимо от способа вычисления их.

Итак, имеются независимые наблюдения

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= u_1 + z \\ v_2 &= u_2 + z \\ v_3 &= u_3 + z \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Разности $v_2 - v_1 = \gamma_1$ и $v_3 - v_2 = \gamma_2$ являются функциями координат определяемой точки, не зависящими от добавочной неизвестной.

Если считать, как сказано, что v_1, v_2 и v_3 — направления на три известные точки A, B и C, расстояния до которых обозначим через s_1, s_2 и s_3, то величинами γ_1 и γ_2 будут углы APB и BPC. Построив инверсии A', B' и C' точек A, B и C, соединим эти точки и получим инверсионный треугольник $A'B'C'$ двух углов (рис. 29).

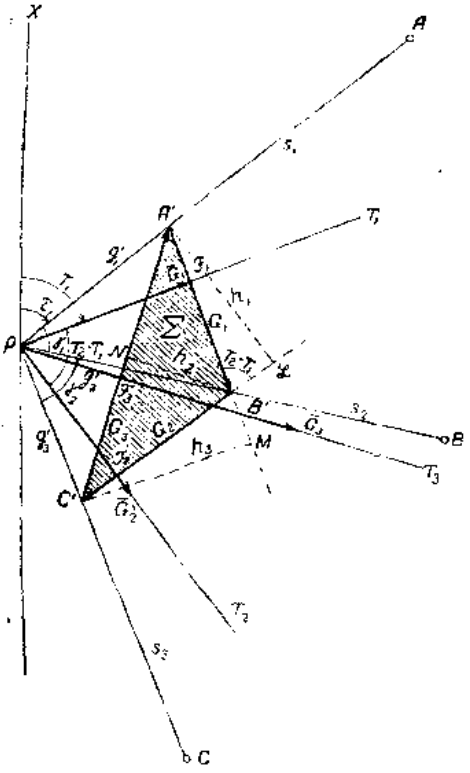

Рис. 29.

На основании сказанного, в примере 6 длина $A'B'$ равна модулю G_1 градиента $\vec{G}_1$ угла γ_1, а направлен он перпендикулярно линии $A'B'$. Обозначим направление градиента $\vec{G}_1$ буквой T_1. Также отрезок $B'C'$ равен модулю градиента $\vec{G}_2$ угла γ_2; направление его обозначим через T_2; градиент угла $\gamma_1 + \gamma_2 = v_3 - v_1$ будет иметь направление T_3, а модуль его равен стороне $C'A'$ инверсионного треугольника $A'B'C'$.

Независимыми будут здесь только две линии положения, соответствующие углам γ_1 и γ_2. Они в пересечении и определят искомое место точки P. Поправки Δx и Δy к приближенным координатам x_c y_c точки P получим по формулам (33) § 5, заменив соответственно

g_1 на G_1; $\quad g_2$ на G_2;

Δu_1 на $(u_2 - u_1) - (u_c' - u_c')$; $\quad \Delta u_2$ на $(u_3 - u_2) - (u_c''' - u_c'')$;

τ_1 на T_1; $\quad \tau_2$ на T_2.

Но для определения средних ошибок ε_x и ε_y точки P указанная замена в формулах (34) средних ошибок ε_1 и ε_2 средними ошибками ε_{γ_1} и ε_{γ_2} углов γ_1 и γ_2 недопустима, так как *ошибки эти не независимы*; в самом деле, индивидуальные случайные ошибки $d\gamma_1 = dv_2 - dv_1$ и $d\gamma_2 = dv_3 - dv_2$ зависят от ошибок dv_2 наблюдения на средний предмет. Прежде всего надо индивидуальные ошибки dx и dy выразить через независимые ошибки dv_1, dv_2 и dv_3 непосредственно наблюденных величин. Дифференцируя уравнение (33)* § 5 по v_1, v_2 и v_3 и делая указанную выше замену одних букв другими, найдем:

$$dx = \frac{G_2 (dv_2 - dv_1) \sin T_2 - G_1 (dv_3 - dv_2) \sin T_1}{G_1 G_2 \sin (T_2 - T_1)};$$

$$dy = \frac{-G_2 (dv_2 - dv_1) \cos T_2 + G_1 (dv_3 - dv_2) \cos T_1}{G_1 G_2 \sin (T_2 - T_1)}.$$

Очевидно, что произведение $G_1G_2 \sin(T_2 - T_1) = \Sigma$ равно удвоенной площади инверсионного треугольника $A'B'C'$.

Представляя dx и dy линейно через индивидуальные случайные ошибки наблюденных величин dv_1, dv_2 и dv_3, найдем:

$$dx\,\Sigma = -G_2 \sin T_2\, dv_1 + (G_2 \sin T_2 + G_1 \sin T_1)\, dv_2 - G_1 \sin T_1\, dv_3;$$
$$dy\,\Sigma = +G_2 \cos T_2\, dv_1 + (G_2 \cos T_2 + G_1 \cos T_1)\, dv_2 + G_1 \cos T_1\, dv_3.$$

Переходя к средним ошибкам ε_x и ε_y, получим:

$$\varepsilon_x^2\,\Sigma^2 = G_2^2 \sin^2 T_1\, \varepsilon_1^2 + (G_2 \sin T_2 + G_1 \sin T_1)^2\, \varepsilon_2^2 + G_1^2 \sin^2 T_1\, \varepsilon_3^2;$$
$$\varepsilon_y^2\,\Sigma^2 = G_2^2 \cos^2 T_1\, \varepsilon_1^2 + (G_2 \cos T_2 + G_1 \cos T_1)^2\, \varepsilon_2^2 + G_1^2 \cos^2 T_1\, \varepsilon_3^2.$$

Складывая эти выражения, найдем квадрат искомой ошибки M:

$$M^2\,\Sigma^2 = G_2^2\, \varepsilon_1^2 + \{G_1^2 + 2G_1G_2 \cos(T_2 - T_1) + G_2^2\}\, \varepsilon_2^2 + G_1^2\, \varepsilon_3^2. \quad (*)$$

Рисунок 29 показывает, что выражение $G_1^2 + 2G_1G_2 \cos(T_2 - T_1) + G_2^2$ есть модуль градиента G_3 угла $\gamma_1 + \gamma_2 = \tau_3 - \tau_1$, а потому вместо (*) получим:

$$M^2\,\Sigma^2 = G_2^2\, \varepsilon_1^2 + G_3^2\, \varepsilon_2^2 + G_1^2\, \varepsilon_3^2$$

или

$$M^2 = \frac{G_2^2}{\Sigma^2}\, \varepsilon_1^2 + \frac{G_3^2}{\Sigma^2}\, \varepsilon_2^2 + \frac{G_1^2}{\Sigma^2}\, \varepsilon_3^2. \quad (47)$$

Обозначая через h_1, h_2 и h_3 высоты инверсионного траугольника $A'B'C'$, где $h_1 = A'L$, $h_2 = B'N$ и $h_3 = C'M$, можно написать

$$\Sigma = G_1h_2 = G_2h_1 = G_3h_2;$$

поэтому вместо (47) получим формулу

$$M^2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_3}{h_3}\right)^2, \quad (48)$$

предложенную проф. В. В. Каврайским.

Если средние ошибки направлений одинаковы и равны ε_0, то

$$M = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2}}. \quad (48)^*$$

Средняя квадратическая ошибка ε_z дополнительной неизвестной может быть подсчитана по формуле

$$\varepsilon_z^2 = \varepsilon_1^2 \left(\frac{H_1}{h_1}\right)^2 + \varepsilon_2^2 \left(\frac{H_2}{h_2}\right)^2 + \varepsilon_3^2 \left(\frac{H_3}{h_3}\right)^2, \quad (49)$$

где $H_1 = CF_1$, $H_2 = CF_2$ и $H_3 = CF_3$ представляют собой длины перпендикуляров из начала C на стороны инверсионного треугольника $A'B'C'$.

Пример 11. Измерены направления с корабля P на три пункта: A, B и C. Расстояния до них $PA = s_1 = 80$ каб., $PB = s_2 = 90$ каб.,

$PC = s_3 = 100$ каб. Направления определены по картушке компаса, и средняя ошибка одного направления $\pm 15' = \pm\frac{1^\circ}{4}$.

Наблюденные направления	Углы	Расстояния	
$v_1 = 10^\circ$		$s_1 = 80$ каб.	$g_1' = \frac{1}{s_1} = \frac{1}{80}$ " или 12 *см*
$v_2 = 130^\circ$	120°	$s_2 = 90$ "	$g_2' = \frac{1}{s_2} = \frac{1}{90}$ " 10,7 "
$v_3 = 250^\circ$	120°	$s_3 = 100$ "	$g_3' = \frac{1}{s_3} = \frac{1}{100}$ " 9,6 "

Принимаем произвольно

$$OA' = g_1' = 12\ см = 0{,}120\ м,$$

поэтому переводный множитель K определится из условия $\frac{K}{80} = 0{,}12\ м$, или $K = 9{,}6\ м$; поэтому абсолютные величины градиентов будут

$$OB' = g_2' = \frac{960\ см}{90} = 10{,}7\ см; \qquad OC' = g_3' = \frac{960\ см}{100} = 9{,}6\ см.$$

Построив инверсионный треугольник $A'B'C'$, измеряем длины перпендикуляров (рисунок не приводится) и находим:

$h_1 = 17{,}1\ см = 0{,}171\ м$	$1 : h_1 = 5{,}848$	$1 : h_1^2 = 34{,}20$
$h_2 = 15{,}2$ " $= 0{,}152$ "	$1 : h_2 = 6{,}579$	$1 : h_2^2 = 43{,}28$
$h_3 = 16{,}0$ " $= 0{,}160$ "	$1 : h_3 = 6.250$	$1 : h_3^2 = 39{,}06$
		$\Sigma \frac{1}{h^2} = 116{,}54$

Формула (48)* при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 15' = \frac{1^\circ}{4}$ дает

$$M = \frac{9{,}6 \times \sqrt{116{,}5}}{229{,}2} = \frac{103{,}8}{229{,}2} = 0{,}45 \text{ каб.}$$

Если при условиях настоящей задачи были бы измерены не направления, а два угла независимо один от другого, то при той же точности наблюдений средняя ошибка измерения углов будет $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^\circ$, и средняя ошибка M по формуле (44) будет равна

$$M = \frac{9{,}6\sqrt{2}}{229{,}2}\sqrt{84{,}20 + 43{,}28} = 0{,}52 \text{ каб.}$$

Б. Полученные выше формулы могут быть найдены другим путем, знакомство с которым представит некоторый интерес. Введем в рассмотрение счислимое место $C(x_c y_c)$, представим выражения (*) на стр. 55 в линейном виде относительно поправок Δx и Δy к счислимым координатам и, применяя метод, указанный в § 1, гл. 3, можем вместо (*) написать:

$$\left.\begin{aligned} g_1 \cos\tau_1 \Delta x + g_1 \sin\tau_1 \Delta y + z &= l_1 \\ g_2 \cos\tau_2 \Delta x + g_2 \sin\tau_2 \Delta y + z &= l_2 \\ g_3 \cos\tau_3 \Delta x + g_3 \sin\tau_3 \Delta y + z &= l_3 \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

где $$l_1 = v_1' - u_c'; \quad l_2 = v_2 - u_c'' \quad \text{и} \quad l_3 = v_3 - u_c'''.$$

Решая эти уравнения по правилам алгебры (Справочник, вып. 1, отд. 1, гл. 1, § 8), найдем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{-l_1(g_3 \sin\tau_3 - g_2 \sin\tau_2) - l_2(g_1 \sin\tau_1 - g_3 \sin\tau_3) - l_3(g_2 \sin\tau_2 - g_1 \sin\tau_1)}{D} \\ \Delta y &= \frac{l_1(g_3 \cos\tau_3 - g_2 \cos\tau_2) + l_2(g_1 \cos\tau_1 - g_3 \cos\tau_3) + l_3(g_2 \cos\tau_2 - g_1 \cos\tau_1)}{D} \\ z &= \frac{l_1 g_2 g_3 \sin(\tau_3 - \tau_2) + l_2 g_3 g_1 (\sin\tau_1 - \tau_3) + l_3 g_1 g_2 \sin(\tau_2 - \tau_1)}{D} \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

где определитель D системы (50) равен

$$D = \begin{vmatrix} g_1 \cos\tau_1, & g_1 \sin\tau_1, & 1 \\ g_2 \cos\tau_2, & g_2 \sin\tau_2, & 1 \\ g_3 \cos\tau_3, & g_3 \sin\tau_3, & 1 \end{vmatrix} \quad (52)$$

или, в раскрытом виде,

$$D = g_1 g_2 \sin(\tau_2 - \tau_1) + g_2 g_3 \sin(\tau_3 - \tau_2) + g_3 g_1 \sin(\tau_1 - \tau_3). \quad (52)^*$$

Из рис. 29 видно, что слагаемые определителя D представляют собой удвоенные площади инверсионных треугольников $OA'B'$, $OB'C'$ и $OA'C'$, причем площадь последнего треугольника следует численно считать отрицательной, а потому определитель D и выражения Σ в формулах (47) и (52)* представляют собой различные формы для одной и той же величины.

Для определения средних ошибок ε_x, ε_y и ε_z искомых неизвестных на основании общих теорем теории ошибок можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^2 &= \frac{\varepsilon_1^2(g_3 \sin\tau_3 - g_2 \sin\tau_2)^2 + \varepsilon_2^2(g_1 \sin\tau_1 - g_3 \sin\tau_3)^2 + \varepsilon_3^2(g_2 \sin\tau_2 - g_1 \sin\tau_1)^2}{D^2} \\ \varepsilon_y^2 &= \frac{\varepsilon_1^2(g_3 \cos\tau_3 - g_2 \cos\tau_2)^2 + \varepsilon_2^2(g_1 \cos\tau_1 - g_3 \cos\tau_3)^2 + \varepsilon_3^2(g_2 \cos\tau_2 - g_1 \cos\tau_1)^2}{D^2} \\ \varepsilon_z^2 &= \frac{\varepsilon_1^2 g_2^2 g_3^2 \sin^2(\tau_3 - \tau_2) + \varepsilon_2^2 g_3^2 g_1^2 \sin^2(\tau_1 - \tau_3) + \varepsilon_3^2 g_1^2 g_2^2 \sin^2(\tau_2 - \tau_1)}{D^2} \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Квадрат средней ошибки M^2 получаем как сумму первых двух выражений (53) и после простых преобразований имеем:

$$M^2 D^2 = \varepsilon_1^2 [g_3^2 + g_2^2 - 2g_3 g_2 \cos(\tau_3 - \tau_2)] + \varepsilon_2^2 [g_1^2 + g_3^2 - 2g_1 g_3 \cos(\tau_1 - \tau_3)] + \varepsilon_3^2 [g_2^2 + g_1^2 - 2g_1 g_2 \cos(\tau_2 - \tau_1)]. \quad (54)$$

Так как множители при ε_1^2, ε_2^2 и ε_3^2 равны квадратам скалярных частей градиентов углов $\tau_3 - \tau_2$, $\tau_1 - \tau_3$ и $\tau_2 - \tau_1$, т. е. величинам G_1, G_2 и G_3, и так как $D = \Sigma$ удвоенной площади инверсионного треугольника $A'B'C'$, то предыдущее выражение только по форме отличается от (47).

Выражения (53) показывают, что при прочих равных условиях искомые координаты x и y определятся наилучшим образом, когда определитель D достигнет наибольшей величины.

Условие максимума D (Справочник, вып. 1, отд. I, гл. 1, § 7) получим таким образом. Обозначим для краткости письма $\tau_2 - \tau_1 = x$, $\tau_3 - \tau_2 = y$ и $\tau_1 - \tau_3 = z$. Надо найти максимум функции

$$D = g_1 g_2 \sin x + g_2 g_3 \sin y + g_3 g_1 \sin z$$

при условии, что

$$\varphi_1 = x + y + z - 2\pi = 0,$$

откуда следует

$$\frac{g_1 g_2 \cos x}{1} = \frac{g_2 g_3 \cos y}{1} = \frac{g_3 g_1 \cos z}{1} = K,$$

т. е.

$$x = \arccos\left(\frac{K}{g_1 g_2}\right); \quad y = \arccos\left(\frac{K}{g_2 g_3}\right); \quad z = \arccos\left(\frac{K}{g_3 g_1}\right), \tag{55}$$

и условное уравнение $\varphi_1 = 0$ дает

$$\arccos\left(\frac{K}{g_1 g_2}\right) + \arccos\left(\frac{K}{g_2 g_3}\right) + \arccos\left(\frac{K}{g_3 g_1}\right) = 2\pi. \tag{55}*$$

Отсюда найдем коррелату K, а по формулам (55) разности направлений градиентов, соответствующих максимуму функции D. Эти условия становятся наиболее наглядными в тех частных случаях, когда а) $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ или б) $g_1 = g_2 = g_3 = g$. В обоих этих случаях разности направлений градиентов должны быть одинаковы и равны

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_3 - \tau_2 = \tau_1 - \tau_3 = 120^\circ \tag{55}**$$

для наиболее точного определения искомых неизвестных.

а) При измерениях высот светил или линейных расстояний градиенты, как известно, равны 1, и тогда из (54) путем простейших преобразований получим, что

$$M = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}. \tag{56}$$

Вполне естественно считать, что точность наблюдений всех величин v_1, v_2 и v_3 одинакова и средняя ошибка равна ε_0, поэтому

$$M = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_0 = 1{,}15\varepsilon_0. \tag{57}$$

С такой средней ошибкой определится, например, место корабля в море по высотам трех звезд при условии, что разности азимутов их попарно равны 120°, и при неизвестной постоянной ошибке в наклонении горизонта, которую можно вывести из этих же наблюдений. Средняя ошибка ε_z дополнительной неизвестной, в данном случае ошибка наклонения горизонта, получится из третьей формулы (54) в таком виде:

$$\varepsilon_z = \frac{\pm 1}{3}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \tag{55}$$

или при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0$

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}57\varepsilon_0. \tag{58}*$$

Тот же результат получили бы и по формуле (49).

б) При наблюдениях направлений на земные предметы градиенты, как известно, равны $\frac{1}{s_i}$, и из формул (54) получается:

$$M = \frac{2}{\sqrt{3}} s\varepsilon_0 = 1{,}15 s\varepsilon_0, \qquad (59)$$

а средняя ошибка дополнительной неизвестной, в данном случае общей поправки компаса, найдется по формуле (58).

Так как величина M дает лишь приближенное представление об ошибке положения точки, то часто можно считать, что s в формуле (59) есть просто среднее арифметическое из s_1, s_2 и s_3, если эти расстояния не слишком разнятся одно от другого. С таким же правом вместо (59) можно принимать в этом случае, что

$$M = \frac{2}{3} \varepsilon_0 \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}. \qquad (59)^*$$

ε_0 здесь выражено в радианах.

Если выражать M в кабельтовах, ε_0 в градусах, а среднее расстояние s_m в милях, то выйдет приближенно

$$M \text{ каб.} \approx \frac{\varepsilon_0 (s_m)}{5} \text{ миль}. \qquad (59)^{**}$$

При пользовании всеми формулами, дающими тем или иным способом среднюю ошибку M, надо всегда помнить, что эта величина представляет собой лишь приближенный критерий точности положения точки.

При этом не следует упускать из виду, что формулы (56)—(59) относятся к случаю, когда разности направлений градиентов попарно равны 120°.

Пример 12. Определить среднюю ошибку M, пользуясь данными примера 11 при измерении углов по картушке компаса; $\varepsilon_0 = \pm 15' = \frac{1^\circ}{4}$.

$s_1 = 80$ каб.	$s_1^2 = 6\,400$
$s_2 = 90$ „	$s_2^2 = 8\,100$
$s_3 = 100$ „	$s_3^2 = 10\,000$
	$\Sigma s^2 = 24\,500$
	$\sqrt{\Sigma s^2} = 156{,}5$

Формула (59)* дает непосредственно

$$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{156{,}5}{229{,}2} = \frac{2}{3} \cdot 0{,}683 = 0{,}46 \text{ каб.}$$

Так как расстояния разнятся не очень значительно, то, приняв $s_m = 9$ миль, получим по формуле (59)**

$$M = \frac{9}{20} = 0{,}45 \text{ каб.}$$

§ 8. Замечания о вычислении градиентов

Для величин градиентов направлений мы брали произвольные масштабы, сообразуясь с размерами рисунка, причем ошибки угловых величин выражали в радианах. Вообще удобнее все угловые величины и их ошибки выражать в градусах, в минутах или в секундах. Во всех случаях угловых наблюдений земных предметов величина отстояния p от счислимого места до определяющей точки K выражается формулой

$$p = (\alpha - \alpha_c)\, s = (\alpha - \alpha_c)^\circ \operatorname{arc} 1^\circ\, s = (\alpha - \alpha)' \operatorname{arc} 1'\, s = (\alpha - \alpha_c)'' \operatorname{arc} 1''\, s$$

или

$$p = \frac{(\alpha - \alpha_c)^\circ}{\frac{1}{s \operatorname{arc} 1^\circ}} = \frac{(\alpha - \alpha)'}{\frac{1}{s \operatorname{arc} 1'}} = \frac{(\alpha - \alpha_c)''}{\frac{1}{s \operatorname{arc} 1''}}.$$

Поэтому величины градиентов можно вычислять так:

$$g = \frac{1}{s \operatorname{arc} 1^\circ} \quad \text{или} \quad \frac{1}{s \operatorname{arc} 1'} \quad \text{или} \quad \frac{1}{s \operatorname{arc} 1''},$$

а угловые величины выражать в градусах, минутах или секундах.

Для численных выкладок надо принимать

$$g = \frac{57{,}295}{s} \quad \text{или} \quad \frac{3438}{s} \quad \text{или} \quad \frac{206265}{s} \text{ соответственно,} \qquad (*)$$

причем размерность градиента попрежнему будет $[L]^{-1}$.

Например, если расстояния выражать в кабельтовах, то при $s = 120$ каб.

$$g = \frac{57{,}296}{120} = 0{,}477 \ [\text{каб.}]^{-1},$$

и если $\varepsilon_1 = \frac{\pm 1^\circ}{4}$, то

$$\varepsilon_{p_4} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}477} = \frac{1}{1{,}908} = 0{,}52 \text{ каб.},$$

т. е. то же самое число, что найдено в примере 8.

Применяя графические методы (по формулам проф. Каврайского), удобно, как мы и делали выше (см. пример 9), абсолютную величину градиента на чертеже выражать в долях метра или даже в сантиметрах. При вычислении градиентов по формулам (*) может оказаться, что размеры их будут неудобны для графических построений на карте или на бумаге и придется их произвольно изменять для получения удобных чисел. Поэтому прием вычисления градиентов, указанный в примере 9, представляется наиболее практичным.

Глава 3

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ 1. Общие соображения о вычислениях. Абсолютные и относительные погрешности 65
§ 2. Относительные погрешности выводов 66
§ 3. Погрешности приискивания углов по логарифмам тригонометрических функций 66
§ 4. Погрешности приискивания углов по натуральным величинам тригонометрических функций 67
§ 5. Формулы для приближенных расчетов 68
§ 6. Формулы интерполирования 69
§ 7. Интерполирование на середину 72
§ 8. Вычисление скорости изменения функции (дифференциальные изменения) по табличным ее значениям 74
§ 9. Интерполирование с помощью скорости изменения функции (по дифференциальным изменениям) 75
§ 10. Вычисление ускорения изменения функции по табличным ее значениям . 76
§ 11. Нахождение аргумента по заданной величине функции (обратное интерполирование) 77
§ 12. Об устройстве резных математических таблиц 78
§ 13. Определение наибольшей или наименьшей величины функции, заданной таблачными значениями 79
§ 14. Интерполяционная формула Лагранжа 81
§ 15. Отыскание ошибок с помощью разностей различных порядков 82

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Я. С. Безикович. Приближенные вычисления, ГИТТЛ, М.—Л., 1941.
А. Н. Крылов. Приближенные вычисления, изд. Академии наук.

§ 1. Общие соображения о вычислениях. Абсолютные и относительные погрешности

В разных прикладных науках приходится иметь дело не только с алгебраическими формулами в буквенном выражении, но и прилагать их к решению частных задач, подставляя в них численные значения, т. е. производить вычисления, причем требуется получить результат с определенной точностью. Количество труда и времени, затрачиваемых на эту работу, а равно и погрешность полученного результата зависят от того, насколько рационально выполняется эта, часто совершенно механическая, работа.

В астрономии и геодезии, где приходится производить очень большие вычисления, выработаны наиболее совершенные методы и приемы, сокращающие и упрощающие труд, обеспечивающие определенную точность и гарантирующие вычислителя от промахов и ошибок.

Главнейшие средства, служащие упрощению вычислений и обеспечивающие получение результатов с надлежащей точностью, следующие: 1) употребление таблиц логарифмов с таким именно числом знаков, которое соответствует точности данных и точности вывода; 2) приведение формул к логарифмическому виду; 3) применение таблиц логарифмов сложения и вычитания; 4) пользование разными вспомогательными таблицами, графиками, номограммами; 5) пользование арифмометрами и разными счетными машинами.

Кроме этих общих мер, в астрономии и геодезии широко применяют особые приемы вычислений, как-то: пользование приближенными формулами вместо строгих, разложение некоторых выражений в быстро сходящиеся ряды и т. п.

Всякая величина выражается числом. Числа бывают двух родов 1) полученные из наблюдений с ошибкой случайного или систематического характера и 2) математические; в последнем случае число значащих цифр может быть взято такое, какое требуется для данной задачи. Когда имеют дело с числами, выражающими результаты некоторых измерений, то число значащих цифр должно быть взято сообразно ошибке или погрешности, которая может заключаться в этом числе.

Абсолютной погрешностью, или поправкой α, называют такую величину, которая, будучи придана к приближенному значению a, дала бы точное значение A рассматриваемой величины.

Иногда бывает удобнее и нагляднее относительная погрешность, т. е. отношение абсолютной погрешности к самому числу A или a.

Относительная погрешность, если выражать ее в виде дроби $\frac{1}{10^n}$, находится в простом соотношении верных значащих цифр в числе,

а именно: число верных значащих цифр в числе приблизительно равно показателю n в выражении относительной погрешности. Приводимая ниже краткая табличка приближенно выражает наглядно высказанное положение.

Относительная погрешность числа	Количество верных значащих цифр в числе
1 : 100	2
1 : 1 000	3
1 : 10 000	4
1 : 100 000	5

Например, если относительная ошибка числа 0,00273964 равна $\frac{1}{10\,000}$, то в нем около четырех верных значащих цифр и его следует округлять как 0,002740.

§ 2. Относительные погрешности выводов

1. Относительная погрешность суммы двух чисел лежит между наибольшей и наименьшей относительными погрешностями слагаемых.

2. Относительная погрешность разности двух чисел может быть больше относительных ошибок уменьшаемого и вычитаемого, если эти величины не слишком отличаются одна от другой. Вычитание двух приближенных чисел, поэтому, представляет действие невыгодное. Лучше вычислять разность $d = a - b$ непосредственно, применяя соответствующие формулы, чем получать величину d как разность двух приближенных чисел a и b.

3. Относительная погрешность произведения и частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

4. Относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания, увеличенной в n раз, если n — показатель степени.

5. Относительная погрешность корня n степени в n раз меньше погрешности основания, а потому извлечение корня представляет действие выгодное.

§ 3. Погрешности приискивания углов по логарифмам тригонометрических функций

Если в логарифме тригонометрической функции sin, cos, tg или ctg взключается погрешность, равная одной единице 4-го знака, то соответствующая погрешность угла определится по формуле

$\Delta x = 0',8 \operatorname{tg} x,$	если	угол	находить	по	$\lg \sin x$
$\Delta x = -0',8 \operatorname{ctg} x$	„	„	„	„	$\lg \cos x$
$\Delta x = 0',4 \sin 2x$	„	„	„	„	$\lg \operatorname{tg} x$
$\Delta x = -0',4 \sin 2x$	„	„	„	„	$\lg \operatorname{ctg} x$
$\Delta x = 0',8 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	„	„	„	„	$\lg \sin^2 \frac{x}{2}$

Эти погрешности будут при той же функции меняться с изменением угла, и приводимая ниже таблица показывает, какого порядка и какого знака можно ожидать погрешность в определяемой величине угла.

Погрешности углов, находимых по логарифмам тригонометрических функций при погрешности логарифма, равной одной единице четвертого знака

Функции / Углы	по lg sin или lg cosec	по lg cos или lg sec	по lg tg или lg ctg	по $\lg \sin^2 \frac{1}{2}$ угла		Функции / Углы
0°	0′,00	∞	0′,00	0′,00	∞	180°
10	0 ,14	4′,49	0 ,14	0 ,07	9′,04	170
20	0 ,29	2 ,18	0 ,26	0 ,14	4 ,49	160
30	0 ,46	1 ,37	0 ,35	0 ,21	2 ,95	150
40	0 ,67	0 ,95	0 ,49	0 ,29	2 ,18	140
50	0 ,95	0 ,67	0 ,40	0 ,37	1 ,70	130
60	1 ,37	0 ,46	0 ,35	0 ,48	1 ,37	120
70	2 ,18	0 ,29	0 ,26	0 ,55	1 ,13	110
80	4 ,49	0 ,14	0 ,14	0 ,66	0 ,94	100
90	∞	0 ,00	0 ,00	0 ,79	0 ,79	90

При увеличении погрешности в логарифме соответственные погрешности в углах будут пропорционально возрастать.

Если вместо четырехзначных логарифмов пользоваться пятизначными, то погрешности в приискиваемых углах уменьшатся в 10 раз, при условии, что погрешность логарифма функции будет одна единица пятого знака.

Числа этой таблицы показывают, что наиболее выгодно находить углы по lg tg, но до 52° выгодна функция $\lg \sin^2 \frac{x}{2}$. После этого предела lg tg даст результат точнее.

§ 4. Погрешности приискивания углов по натуральным величинам тригонометрических функций

Если вместо логарифмических вычислений применять таблицы натуральных величин тригонометрических функций, то результаты будут несколько иные.

Погрешности в углах, найденных по натуральным величинам тригонометрических функций (если погрешность функции угла привать равной единице четвертого знака), выражаются следующими формулами:

$\Delta x = 0',34 \sec x$	если	угол	находить	по	sin
$\Delta x = -0',34 \operatorname{cosec} x$	„	„	„	„	cos
$\Delta x = 0',34 \cos^2 x$	„	„	„	„	tg
$\Delta x = -0',34 \sin^2 x$	„	„	„	„	ctg
$\Delta x = 0',68 \operatorname{cosec} x$	„	„	„	„	$\sin^2 \frac{1}{2}$ угла

Так как при любой величине угла $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ меньше, чем $\sec x$ или $\operatorname{cosec} x$, то приискивание угла по tg или ctg всегда выгоднее, чем по sin или cos. Вместе с тем видно, что натуральные величины $\sin^2 \frac{1}{2}$ угла не представляют никакой выгоды, так как погрешности

приискивания углов по этой функции вдвое больше, чем при пользовании cos. Приводимая ниже табличка показывает порядок тех погрешностей, которых можно ожидать в углах, найденных по таблицам натуральных величин тригонометрических функций.

Погрешности углов, находимых по натуральным величинам тригонометрических функций при погрешности функции, равной одной единице четвертого десятичного знака

Функции / Углы	по sin	по cos	по tg	по ctg	по sec	по cosec	по $\sin^2\frac{1}{2}$ угла	Функции / Углы
0°	0′,34	∞	0′,34	0′,00	∞	0′,00	∞	180°
10	0 ,35	1′,98	0 ,33	0 ,01	1′,92	0 ,01	3′,95	170
20	0 ,37	1 ,01	0 ,30	0 ,04	0 ,89	0 ,04	2 ,01	160
30	0 ,40	0 ,69	0 ,26	0 ,09	0 ,52	0 ,10	1 ,38	150
40	0 ,45	0 ,54	0 ,20	0 ,14	0 ,31	0 ,19	1 ,08	140
50	0 ,54	0 ,45	0 ,14	0 ,20	0 ,19	0 ,31	0 ,91	130
60	0 ,00	0 ,40	0 ,09	0 ,26	0 ,10	0 ,52	0 ,80	120
70	1 ,01	0 ,37	0 ,04	0 ,30	0 ,04	0 ,89	0 ,74	110
80	1 ,98	0 ,35	0 ,01	0 ,33	0 ,01	1 ,92	0 ,71	100
90	∞	0 ,34	0 ,00	0 ,34	0 ,00	∞	0 ,68	90

Из сравнения чисел таблиц 1 и 2 видно, что с точки зрения точности нахождения углов можно сказать, что малые углы выгоднее находить по таблицам логарифмов, а углы средней величины лучше приискивать по таблицам натуральных величин тригонометрических функций.

§ 5. Формулы для приближенных расчетов

1. $(1 \pm \alpha)(1 \pm \beta) \approx 1 \pm \alpha \pm \beta$, где α и β — малые величины,
   например: $1{,}032 \cdot 0{,}996 \approx 1 + 0{,}032 - 0{,}004 \approx 1{,}028$ (точно 1,027872).
2. $(1 \pm \alpha)(1 \pm \beta)(1 \pm \gamma) \approx 1 \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma$,
   например: $1{,}011 \cdot 1{,}008 \cdot 0{,}998 \approx 1 + 0{,}011 + 0{,}008 - 0{,}002 \approx 1{,}017$
   (точно 1,017049824).
3. $\frac{1}{1 \pm \alpha} \approx 1 \mp \alpha$,
   например: $\frac{1}{1{,}014} \approx 1 - 0{,}014 \approx 0{,}986$ (точно 0,986193).
4. $\frac{1 \pm \alpha}{1 \pm \beta} = 1 \pm \alpha \mp \beta$,
   например: $\frac{0{,}989}{1{,}017} \approx 1 - 0{,}011 - 0{,}017 \approx 0{,}972$ (точно 0,97246).
5. $(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$,
   например: $(0{,}982)^{3/2} \approx (1 - 0{,}018)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \cdot 0{,}018 \approx 0{,}973$
   (точно 0,973122).

Величина n может быть целой, дробной, положительной или отрицательной и даже иррациональной.

6. $\frac{1}{(1 \pm \alpha)^n} \approx 1 \mp n\alpha$,

например: $\frac{1}{(0{,}982)^{3/2}} \approx 1 + \frac{3}{2} 0{,}018 \approx 1{,}027$ (точно 1,027621).

7. $\sqrt[n]{1 \pm \alpha} = 1 \pm \frac{1}{n} \alpha$,

например: $\sqrt{1{,}008} \approx 1{,}004$.

8. $\frac{1}{\sqrt[n]{1 \pm \alpha}} = 1 \mp \frac{1}{n} \alpha$,

например: $\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}01}} \approx 0{,}997$.

9. $\sqrt{A^2 \pm \alpha} = A \pm \frac{\alpha}{2A}$,

например: $\sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + \frac{5}{20} \approx 10{,}25$.

10. $\sqrt[3]{A^3 \pm \alpha} = A \pm \frac{\alpha}{3A^2}$,

например: $\sqrt[3]{7{,}85} = \sqrt[3]{2^3 - 0{,}15} \approx 2 - \frac{0{,}15}{3 \cdot 4} \approx 1{,}987$.

11. $\sqrt[n]{A^n \pm \alpha} = A \pm \frac{\alpha}{nA^{n-1}}$,

например: $\sqrt[4]{620} - \sqrt[4]{5^4 - 5} \approx 5 - \frac{5}{4 \cdot 5^3} \approx 4{,}990$.

§ 6. Формулы интерполирования

Пусть для равноотстоящих значений аргументов $a - 3w$, $a - 2w$, $a - w$, a, $a + w$, $a + 2w$, $a + 3w$ дан ряд численных значений функции y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, ..., как указано ниже в таблице; требуется найти численное значение функции для аргумента $a + x$, где $x < w$. Для этой цели служат интерполяционные формулы, выражающие приращение функции через разности различных порядков.

Аргументы	Функции	1-е разности	2-е разности	3-и разности	4-е разности
$a - 3w$	y_{-3}				
		$\Delta^I_{-5/2}$			
$a - 2w$	y_{-2}		Δ^{II}_{-2}		
		$\Delta^I_{-3/2}$		$\Delta^{III}_{-3/2}$	
$a - w$	y_{-1}		Δ^{II}_{-1}		Δ^{IV}_{-1}
		$\Delta^I_{-1/2}$		$\Delta^{III}_{-1/2}$	
a	y_0		Δ^{II}_0		Δ^{IV}_0
		$\Delta^I_{1/2}$		$\Delta^{III}_{1/2}$	
$a + w$	y_1		Δ^{II}_1		Δ^{IV}_1
		$\Delta^I_{3/2}$		$\Delta^{III}_{3/2}$	
$a + 2w$	y_2		Δ^{II}_2		
		$\Delta^I_{5/2}$			
$a + 3w$	y_3				

Разности различных порядков образуют из чисел предыдущего столбца, *вычитая из нижнего верхнее число* в том же столбце, как показано ниже:

$$\Delta^{I}_{-3/2}=y_{-2}-y_{-3},\qquad \Delta^{I}_{-1/2}=y_{-1}-y_{-2},\qquad \Delta^{I}_{1/2}=y_{0}-y_{1},$$
$$\Delta^{II}_{-2}=\Delta^{I}_{-1/2}-\Delta^{I}_{-3/2},\qquad \Delta^{II}_{-1}=\Delta^{I}_{1/2}-\Delta^{I}_{-1/2},\qquad \Delta^{II}_{0}=\Delta^{I}_{3/2}-\Delta^{I}_{1/2},$$
$$\Delta^{III}_{-1/2}=\Delta^{II}_{-1}-\Delta^{II}_{-2},\qquad \Delta^{III}_{1/2}=\Delta^{II}_{0}-\Delta^{II}_{-1},\qquad \Delta^{III}_{3/2}=\Delta^{II}_{1}-\Delta^{II}_{0},$$
$$\Delta^{IV}_{-1}=\Delta^{III}_{-1/2}-\Delta^{III}_{-3/2},\qquad \Delta^{IV}_{0}=\Delta^{III}_{1/2}-\Delta^{III}_{-1/2},\qquad \Delta^{IV}_{1}=\Delta^{III}_{3/2}-\Delta^{III}_{1/2}.$$

$$\Delta^{I}_{1/2}=y_{1}-y_{0},\qquad \Delta^{I}_{3/2}=y_{2}-y_{1}\ \text{и т. д.},$$
$$\Delta^{II}_{1}=\Delta^{I}_{3/2}-\Delta^{I}_{1/2},\qquad \Delta^{II}_{2}=\Delta^{I}_{5/2}-\Delta^{I}_{3/2}\ \text{и т. д.}$$
$$\Delta^{III}_{3/2}=\Delta^{II}_{2}-\Delta^{II}_{1}\qquad \text{и т. д.}$$

Обозначая через t фазу интерполирования

$$t=\frac{x}{\omega},\tag{1}$$

применяем одну из следующих интерполяционных формул.

А. Формула Бесселя:

$$y=y_0+t\Delta^{I}_{1/2}+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}D^{II}_{1/2}+\frac{t(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^{III}_{1/2}+$$
$$+\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}D^{IV}_{1/2}+\ldots\tag{2}$$

Здесь D с дробными значками внизу — разности четного порядка, — второго, четвертого и т. д., образованные как средние арифметические из выше и ниже стоящих относительно строчки, отмеченной пунктиром, т. е.

$$\left.\begin{aligned}D^{II}_{1/2}&=\frac{1}{2}\left(\Delta^{II}_{0}+\Delta^{II}_{1}\right)\\ D^{IV}_{1/2}&=\frac{1}{2}\left(\Delta^{IV}_{0}+\Delta^{IV}_{1}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Таким образом, в формулу Бесселя входят разности, приходящиеся в „половинную строчку", т. е. в строчку, лежащую между нулевым значением аргумента $t=0$ (строчка a) и $t=1$ (строчка $a+\omega$).

Формула Бесселя считается наиболее удобной для приложений:

если $D^{IV}_{1/2}<21$ единицы последнего знака, то четвертыми и высшими разностями можно пренебречь;

если $\Delta^{III}_{1/2}<62$ единиц последнего знака, то третьими и высшими разностями можно пренебречь;

если $D^{II}_{1/2}<4$ единиц последнего знака, то вторыми и высшими разностями можно пренебречь, не допуская при этом погрешности в вычислениях большей, чем $^1/_2$ единицы последнего знака.

Б. Формула Стирлинга:

$$y=y_0+tD^{I}_{0}+\frac{t^2}{1\cdot 2}\Delta^{II}_{0}+\frac{t(t^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}D^{III}_{0}+\frac{t^2(t^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^{IV}_{0}+\ldots\tag{4}$$

В эту формулу входят разности, приходящиеся против нулевой строчки, т. е. соответствующей аргументу $t=0$ (строчка *а*).

Здесь

$$\left.\begin{aligned} D_0^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{2}\left(\Delta^{\mathrm{I}}_{-1/2} + \Delta^{\mathrm{I}}_{1/2}\right) \\ D_0^{\mathrm{III}} &= \frac{1}{2}\left(\Delta^{\mathrm{III}}_{-1/2} + \Delta^{\mathrm{III}}_{1/2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

В. Формула Ньютона:

$$y = y_0 + t\Delta^{\mathrm{I}}_{1/2} + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^{\mathrm{II}}_{1} + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^{\mathrm{III}}_{1/2} + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^{\mathrm{IV}}_{2} + \ldots \qquad (6)$$

Как видно, в эту формулу входят ведущие разности, т. е. идущие по диагонали вниз (в таблице они подчеркнуты).

Формула Ньютона менее удобна, чем предыдущие, но ею пользуются, если приходится интерполировать для аргумента, лежащего в начале таблицы.

Если интерполируют для интервала, приходящегося в конце таблицы, то формула Ньютона принимает следующий вид:

$$y = y_2 + t\Delta^{\mathrm{I}}_{1/2} + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^{\mathrm{II}}_{0} + \frac{t(t^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^{\mathrm{III}}_{-1/2} + \frac{t(t^2-1)(t+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^{\mathrm{IV}}_{-1}. \qquad (7)$$

Сюда входят разности различных порядков, *идущие по диагонали вверх по таблице.*

Иногда приходится интерполяционные формулы представлять в виде полиномов, расположенных по степеням аргумента (фазы) t; формула Бесселя (2) в этом случае принимает вид

$$y = y_0 + At + B\frac{t^2}{1\cdot 2} + C\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} + D\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots, \qquad (8)$$

где коэффициенты A, B, C и D через разности различных порядков выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} A &= \Delta^{\mathrm{I}}_{1/2} - \frac{1}{2}D^{\mathrm{II}}_{1/2} + \frac{1}{12}\Delta^{\mathrm{III}}_{1/2} + \frac{1}{12}D^{\mathrm{IV}}_{1/2} + \ldots \\ B &= D^{\mathrm{II}}_{1/2} - \frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{III}}_{1/2} - \frac{1}{12}D^{\mathrm{IV}}_{1/2} - \ldots \\ C &= \Delta^{\mathrm{III}}_{1/2} - \frac{1}{2}D^{\mathrm{IV}}_{1/2} - \ldots \\ D &= D^{\mathrm{IV}}_{1/2} - \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Формула Ньютона (6) примет вид:

$$y = y_0 + A_1 t + B_1\frac{t^2}{1\cdot 2} + C_1\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} + D_1\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots, \qquad (10)$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 и D_1 через ведущие разности выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \Delta^{I}_{1/2} - \frac{1}{2}\Delta^{II}_{1} + \frac{1}{3}\Delta^{III}_{1/2} - \frac{1}{4}\Delta^{II}_{2} + \dots \\ B_1 &= \Delta^{II}_{1} - \Delta^{III}_{1/2} + \frac{11}{12}\Delta^{IV}_{2} - \dots \\ C_1 &= \Delta^{III}_{1/2} - \frac{3}{2}\Delta^{IV}_{2} + \dots \\ D_1 &= \Delta^{IV}_{2} - \dots \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

Таким образом, формулы (8)—(11) дают простой прием представления некоторой функции, заданной в численной форме через равноотстоящие интервалы аргумента, в алгебраической форме многочлена n-й степени от той же переменной независимой.

§ 7. Интерполирование на середину

Полагая в формуле Бесселя (2) $t = \frac{1}{2}$, получаем:

$$y_{1/2} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) - \frac{1}{8}D^{II}_{1/2} + \frac{3}{128}D^{IV}_{1/2} + \dots \qquad (1)$$

Эта формула имеет большое значение, так как, удерживая в ней только вторые разности, мы фактически принимаем во внимание разности третьего порядка; удерживая четвертые разности, принимаем во внимание разности пятого порядка.

Полагая в формуле Ньютона (6) $t = \frac{1}{2}$, получим при интерполировании *вниз по таблице*:

$$y_{1/2} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) - \frac{1}{8}\Delta^{II}_{1} + \frac{1}{16}\Delta^{III}_{1/2} - \frac{5}{128}\Delta^{IV}_{2} - \dots \qquad (2)$$

Для интерполирования на середину в конце таблицы, принимая в формуле (7) $t = \frac{1}{2}$, найдем:

$$y_{1/2} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) - \frac{1}{8}\Delta^{II}_{0} - \frac{1}{16}\Delta^{III}_{-1/2} - \frac{5}{128}\Delta^{IV}_{-1}. \qquad (3)$$

Пример. Допустим, что в приведенной ниже таблице даны прямые восхождения Луны в 0^h всемирного времени в указанные дни февраля 1946 г.

Пользуясь этими данными, надо расширить таблицу и дать прямые восхождения α в 12^h на все указанные дни февраля.

1946 Февраль	В 0^h всемирного времени α Луны	Δ^I	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}	Δ^V	Δ^{VI}
16	$9^h52^m45^s,3$						
		$+51^m55^s,7$					
17	10 44 41 ,0		$-2^m57^s,3$				
		$+48\ 58\ ,4$		$+39^s,9$			
18	11 33 39 ,4		$-2^m17^s,4$		$+9^s,0$		
		$+46\ 41\ ,0$	[— 112,95]	$+48\ ,9$	[+ 5,6]	$-6^s,8$	
19	12 20 20 ,4		$-1^m28^s,5$		$+2^s,2$		$+2^s,8$
		$+45\ 12\ ,5$	[— 62,95]	$+51\ ,1$	[+ 0,2]	— 4 ,0	
20	13 05 32 ,9		$-0^m37^s,4$		$-1^s,8$		+ 1 ,9
		$+44\ 35\ ,1$	[— 12,9]	$+49\ ,3$	[— 2,85]	— 2 ,1	
21	13 50 00 ,0		$+0^m11^s,9$		$-3^s,9$		
		$+44\ 47\ ,0$	[+ 34,6]	$+45\ ,4$			
22	14 34 55 ,0		$+0^m57^s,3$				
		$+45\ 44\ ,3$					
23	15 20 39 ,3						

Составляем разности различных порядков включительно до шестого и для четных разностей Δ^{II} и Δ^{IV} и находим средние значения $D^{II}_{1/2}$ и $D^{IV}_{1/2}$ (покаваны в таблице в скобках). Затем берам полусумму последовательных, рядом стоящих значений Ф и вписываем эти значения в нижеследующую таблицу; находим величины $\frac{1}{8}D^{II}_{1/2}$ и $\frac{3}{128}D^{IV}_{1/2}$ и пишем их рядом; суммы этих чисел дают искомые заачения Ф на 12^h всемирного времени, которые совпадают с теми, которые приведены в Астрономическом Ежеголнике на стр. 41.

Февраль	$\frac{1}{2}(y_0+y_1)$.	$-\frac{1}{8}D^{II}_{1/2}$	$+\frac{3}{128}D^{IV}_{1/2}$		$y_{1/2}$
18,5	$11^h56^m59^s,9$	$+14^s,12$	$+0^s,13$	=	$11^h57^m14^s,1$
19,5	12 42 56 ,65	+ 7 ,87	+ 0 ,00	=	12 43 04 ,5
20,5	13 27 50 ,45	+ 1 ,61	— 0 ,07	=	13 27 52,0

Чтобы найти прямые восхождения Луны на февраль 16,5, следует воспользоваться формулой (2), взяв ведущие разности $-2^m57^s,3$, $+39^s,9$, $+9^s,0$, а для февраля 17,5 соответственно разности $2^m17^s,4$, $+48^s,9$, $+2^s,2$; тогда получим:

Февраль	$\frac{1}{2}(y_0-y_1)$	$-\frac{1}{8}\Delta^{II}_{1}$	$-\frac{1}{16}\Delta^{III}_{1/2}$	$-\frac{5}{128}\Delta^{IV}_{1}$		$y_{1/2}$
16,5	$10^h18^m43^s,15$	$+22^s,16$	$+2^s,50$	$-0^s,35$	=	$10^h19^m7^s,5$
17,5	11 19 10 ,20	+ 17 ,17	+ 3 ,06	— 0 ,09	=	11 19 30 ,4

Для конца таблицы, т. е. для 21,5 и 22,5 февраля, следует воспользоваться формулой (3).

Февраль	$\frac{1}{2}(y_0 - y_1)$	$-\frac{1}{8}\Delta^{II}$	$-\frac{1}{16}\Delta^{III}_{1/2}$	$-\frac{5}{128}\Delta^{IV}_{1}$		$y_{1/2}$
21,5	14ч12м31с,50	—1с,49	—3с,08	+0с,07	=	14ч12м27с,0
22,5	14 57 47 ,15	—7 ,16	—2 ,84	+0 ,15	=	14 57 37 ,3

Некоторые результаты отличаются на десятые доли секунды от данных Астрономического Ежегодника вследствие пренебрежения разностями выше четвертого порядка.

§ 8. Вычисление скорости изменения функции (дифференциальные изменения) по табличным ее значениям

Часто требуется найти численное значение скорости изменения функции, которая задана не аналитически, а в виде таблицы величин для равноотстоящих значений аргумента, подобной приведенной на стр. 69.

Составив разности различных порядков, как сказано выше, вычисляют скорость V изменения функции y, или дифференциальные изменения функции, по следующей формуле:

$$V = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\left(\Delta^{I}_{-1/2} + \Delta^{I}_{1/2}\right) - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\left(\Delta^{III}_{-1/2} + \Delta^{III}_{1/2}\right)\right]\right\} \qquad (1)$$

В тех случаях, когда третьими разностями можно пренебречь, формула (1) принимает более простой вид:

$$V = \frac{1}{w}\left[\frac{1}{2}\left(\Delta^{I}_{-1/2} + \Delta^{I}_{1/2}\right)\right]. \qquad (2)$$

Пример. Для примера приложения формулы (2) выпишем из Астрономического Ежегодника за 1946 г. значения склонения δ Солнца с 1 по 6 июля, как дано ниже в таблице, и найдем по этим данным часовые изменения склонения Солнца.

1946	В 0ч всемирного времени склонение Солнца δ	Δ^1	$\frac{1}{2}\left(\Delta^1_{-1/2} + \Delta^1_{1/2}\right)$	Часовые изменения
1	+23°10′13″,3			
		—3′53″,1		
2	+23 06 20 ,2		—4′05″,25	—10″,22
		—4 17 ,4		
3	+23 02 02 ,8		—4 29 ,50	—11 ,23
		—4 41 ,6		
4	+22 57 21 ,2		—4 53 ,60	—12 ,23
		—5 05 ,6		
5	+22 52 15 ,6		—5 17 ,55	—13 ,23
		—5 29 ,5		
6	+22 46 46 ,1			

Составив первые разности Δ', легко убедимся, что вторые разности остаются практически постоянными, а потому для вычисления часовой *скорости* изменения δ можно пользоваться формулой (2).

Так как функции (склонение) даны в таблице через сутки, а скорость изменения склонения надо найти в один час, то делитель ω в формуле (1) равен 24.

Взяв средние из первых разностей (написанных между строчками), пишем их в строчки против соответствующих значений аргумента и полученные средние величины $-4'05'',25$, $-4'29'',5$ и т. д. делим, как сказано, на 24 и находим искомые часовые изменения склонения, которые в точности совпадают с тем, что приведено в Астрономическом Ежегоднике на стр. 14.

§ 9. Интерполирование с помощью скорости изменения функции (по дифференциальным изменениям)

Если через V_0, V_1, V_2 и т. д. обозначить переменные скорости изменения функции за определенную единицу изменения аргумента, как показано в таблице:

Аргумент	Функции	Скорость изменений
a	y_0	V_0
$a+\omega$	y_1	V_1
$a+2\omega$	y_2	V_2
. . . .	. . . .	. . . .

то значение функции y для любого аргумента $a+x$, где $x<\omega$, будет равно

$$y = y_0 + xV_0 + \frac{x^2}{2}\frac{(V_1 - V_0)}{\omega} \qquad (1)$$

или

$$y = y_0 + x\left(V_0 + \frac{x}{2}\frac{V_1 - V_0}{\omega}\right). \qquad (2)$$

Аргумент x здесь выражен в именованных числах.

Пример. Пользуясь найденными в предыдущем параграфе часовыми изменениями, определим, например, точную величину склонения Солнца в 8^h0^m всемирного времени 3 июля по формуле (1).

В этом случае аргумент x надо считать равным 8,0, $V_0 = -11'',23$, $V_1 = -12'',23$; ω равно 24, так как разность $V_1 - V_0 = -12'',23 + 11'',23 = -1'',00$ представляет собой изменение скорости, т. е. ускорение за сутки, а $\frac{V_1 - V_0}{24}$ будет ускорение в час, что и требуется по формуле (1).

Тогда получим по формуле (1):

$$\delta = +23°02'02'',8 - 8,0 \cdot 11'',23 - \frac{64}{2}\frac{1'',00}{24} =$$

$$= +23°02'02'',8 - 1'29'',84 - 1'',33 = +23°00'31'',6.$$

Несколько удобнее вторая формула (2), и в этом случае вычисления выполняются в таком виде:

$$\delta = +23°02'02'',8 + 8,0\left(-11'',23 - \frac{8,0}{2}\frac{1,00}{24}\right) =$$

$$= +23°02'02'',8 - 8',0\,(11'',40) = +23°02'02''8 - 1'31'',2 = +23°00'31'',6.$$

Сравним формулу (1) с общеизвестным выражением

$$s = s_0 + vt + \frac{1}{2} wt^2, \tag{3}$$

которое представляет величину пройденного расстояния s в равноускоренном движении, где v — скорость, w — ускорение, t — время.

Легко понять, что V_0 в формуле (1) есть как бы скорость изменения функции y, а $\frac{V_1 - V_0}{w}$ есть постоянное ускорение в изменении функции y; аргумент, т. е. величина x, играет роль времени.

§ 10. Вычисление ускорения изменения функции по табличным ее значениям

В некоторых случаях необходимо определить независимо величину ускорения в изменении функции за определенную единицу изменения аргумента.

Для вычисления ускорения W служит формула

$$W = \frac{1}{w^2}\left(\Delta_b^{II} - \frac{1}{12}\Delta_0^{IV}\right). \tag{1}$$

Если третьи разности постоянны, то четвертые равны 0, и предыдущая формула принимает более простой вид:

$$W = \frac{1}{w^2}\,\Delta_0^{II}, \tag{2}$$

где w имеет прежнее значение. Переменная величина ускорения W будет отнесена к тому же самому аргументу, как и скорость V, найденная в предыдущем параграфе, т. е. эти величины должны быть написаны *в одной горизонтальной* строчке, приходящейся против аргумента a.

Пример. Найти ускорения движения Солнца по склонению, пользуясь данными примера предыдущего параграфа.

1946 июль	В 0^h всемирного времени склонение Солнца δ	Δ^I	Δ^{II}	Ускорение в час
1	+ 23°10′13″,3			
		— 3′53″,1		
2	+ 23 06 20 ,2		— 24″,3	— 0″,0422
		— 4 17 ,4		
3	+ 23 02 02 ,8		— 24 ,2	— 0 ,0420
		— 4 41 ,6		
4	+ 22 57 21 ,2		— 24 ,0	— 0 ,0416
		— 5 05 ,6		
5	+ 22 52 15 ,6		— 23 ,9	— 0 ,0415
		— 5 29 ,5		
6	+ 22 46 46 ,1			

Делим вторые разности Δ'' на 24, записываем полученные частные в те же строчки и получаем искомые значения ускорения в час.

Таким образом, для 0^h 3 июля имеем данные:

$$\delta_0 = +23°02'02''{,}8, \quad V_0 = -11''{,}23 \quad \text{и} \quad W_0 = -0''{,}042.$$

По этим данным для 8^h всемирного времени получим склонение Солнца по формуле (3) предыдущего параграфа:

$$\delta = +23°02'02''{,}8 - 11''{,}23 \cdot 8{,}0 - \frac{1}{2} 64 \cdot 0''{,}042 =$$

$$= +23°02'02''{,}8 - 1'29''{,}84 - 1''{,}34 = +23°00'31''{,}6,$$

т. е. получена та же величина, что и раньше.

Рассмотренные в § 8 и 10 приемы численного дифференцирования имеют важное значение для исследования характера изменения функции, заданной графически или в виде таблицы.

§ 11. Нахождение аргумента по заданной величине функции (обратное интерполирование)

Решая уравнение (8) § 6 относительно t, получим:

$$t = \frac{y - y_0}{A} - \frac{B}{2A} t^2 - \frac{C}{6A} t^3 - \frac{D}{24A} t^4. \qquad (*)$$

В первом приближении принимаем

$$t_1 = \frac{y - y_0}{A}; \qquad (1)$$

во втором приближении

$$t_2 = t_1 - \frac{B}{2A} t_1^2 - \frac{C}{6A} t_1^3 - \frac{D}{24A} t_1^4; \qquad (2)$$

в третьем приближении

$$t_3 = t_2 - \frac{B}{2A} t_2^2 - \frac{C}{6A} t_2^3 - \frac{D}{24A} t_2^4 - \ldots \qquad (3)$$

Продолжая этот процесс, получим, наконец, два одинаковых последовательных значения: t_n и t_{n+1}. Это и будет искомое решение уравнения (*) относительно t.

Тогда

$$x = tw. \qquad (4)$$

Многие таблицы устроены таким образом, что приходится принимать во внимание только вторые разности при интерполировании; в таком случае нахождение аргумента по заданной величине функции упрощается и выполняется по формулам

$$\left.\begin{aligned} A &= \Delta^{\mathrm{I}}_{l_2} - {}^1/_2 D^{\mathrm{II}}_{l_2} \\ t_1 &= \frac{y - y_0}{A} \\ t &= t_1 - \frac{D^{\mathrm{II}}_{l_2}}{2A} t_1^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Вместо метода последовательных приближений можно выражение (*) разложить в ряд, пользуясь рядом Лагранжа (Справочник, вып. 1, отд. II, гл. 2, § 16); тогда получим:

$$t = t_1 - \frac{B}{2A}\left[t_1^2 + \frac{C}{3B}t_1^3 + \frac{D}{12B}t_1^4\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{2A}\right)^2\left[2t_1 + \frac{C}{B}t_1^2 + \frac{D}{3B}t_1^3\right] -$$

$$- \frac{1}{6}\left(\frac{B}{2A}\right)^3[12t_1^3 + \ldots] + \ldots \qquad (6)$$

§ 12. Об устройстве разных математических таблиц

Чем чаще даны аргументы в какой-нибудь математической таблице, тем легче ею пользоваться для нахождения промежуточных значений функций. Но подобные таблицы иногда бывают слишком обширны, а потому неудобны в обращении и дороги.

Таблицы постоянного пользования, как например логарифмические или натуральных величин тригонометрических функций, строят именно так, чтобы они допускали простое пропорциональное интерполирование, а для облегчения этой операции их снабжают вспомогательными „пропорциональными" частями. Для того чтобы таблицы допускали простое пропорциональное интерполирование, необходимо, чтобы вторые разности табличных величин были меньше четырех единиц последнего знака.

Если аргументы какой-нибудь таблицы даны редко, то такая таблица весьма компактна, но при пользовании ею приходится принимать во внимание разности высших порядков, что осложняет вычислительный процесс.

Таким образом, краткость таблицы и удобство пользования ею — требования, обычно не совместные. Иногда эти условия хорошо согласуются, если таблица построена для таких значений аргумента, при которых приходится *принимать во внимание только вторые разности*, а третьи и высшие отбрасывать.

На этом принципе построены все Астрономические Ежегодники, предназначенные для геодезических целей и береговых наблюдений. На принципе простого пропорционального интерполирования построен Морской Астрономический Ежегодник.

Если при интерполировании ограничиваться вторыми разностями, то формула Бесселя принимает такой простой вид:

$$y = y_0 + t\Delta^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} D^{II}_{1/2}. \qquad (1)$$

Член $t\Delta^1_{1/2}$ дает результат простого пропорционального интерполирования, а член $\frac{t(t-1)}{2} D^{II}_{1/2}$ есть поправка этого результата за вторые разности.

Эту формулу удобно также представить в виде

$$y = y_0 + t\Delta^1_{1/2} + T(\Delta^{II}_0 + \Delta^{II}_1). \qquad (2)$$

Численные значения множителя T через 0,001 приведены в нижеследующей таблице.

Коэффициенты $T = \frac{t(t-1)}{4}$ (всегда отрицательны) для поправок за вторые разности в формуле Бесселя

t	T	t	t	T	t	t	T	t
0,000		1,000	0,090		0,910	0,210		0,790
002	—0,000	0,998	095	—0,021	905	217	—0,042	783
006	001	994	100	022	900	224	043	776
010	002	990	105	023	895	231	044	769
014	003	986	110	024	890	239	045	761
018	004	982	115	025	885	247	046	753
022	005	978	120	026	880	255	047	745
026	006	974	125	027	875	263	048	737
030	007	970	131	028	869	271	049	729
035	008	965	136	029	864	280	050	720
039	009	961	142	030	858	290	051	710
043	010	957	147	031	853	300	052	700
048	011	952	158	032	847	310	053	690
052	012	948	159	033	841	321	054	679
057	013	943	165	034	835	332	055	668
061	014	939	171	035	829	345	056	655
066	015	934	177	036	823	358	057	642
071	016	929	183	037	817	373	058	627
075	017	925	190	038	810	390	058	610
000	018	920	196	039	804	410	060	590
085	019	915	203	040	797	436	051	564
0,090	—0,020	0,910	0,210	—0,041	0,790	0,500	062	0,500

§ 13. Определение наибольшей или наименьшей величины функции, заданной табличными значениями

С помощью разностей различных порядков составляют величины A, B, C и D по формулам (9), § 6; фаза t, соответствующая наибольшему или наименьшему значению функции, определяется методом последовательных приближений из формулы

$$t = -\frac{A}{B} - \frac{Ct^2}{2B} - \frac{Dt^3}{6B} - \ldots \qquad (1)$$

$$t_2 = t_1 - \frac{Ct_1^2}{2B_2} - \frac{Dt_1^3}{6B}$$
$$t_3 = t_1 - \frac{Ct_2^2}{2B} - \frac{Dt_2^3}{6B} \qquad (2)$$

и т. д.

Найдя фазу t, искомую наибольшую величину функции получают по формуле (2) § 6, пользуясь имеющимися разностями, или даже, проще, подставляя найденную величину фазы в формулу (8) § 6.

Пример. Определить время, когда широта Луны достигнет наибольшего значения, и численную величину ее, пользуясь данными следующей таблицы, представляющей краткую выписку широт Луны из Астрономического Ежегодника:

	β	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}
9 августа 0^{h}	4°51′17″,4				
		+7′ 8″,0			
9 „ 12	4 58 25 ,4		—4′ 1″,4		
		+3 6 ,6		+3″,2	
10 „ 0	5 01 32 ,0		—3 58 ,2		+3″,2
		—0 51 ,6		+6 ,4	
10 „ 12	5 00 40 ,4		—3 51 ,8		
		—4 43 ,4			
11 „ 0	4 55 57 ,0				

Составив разности, вычислим коэффициенты A, B, C, D формулы (9) и получим:

$$A = -0'51'',6 + \frac{1}{2}3'55'',0 + \frac{1}{12}6'',4 + \frac{1}{12}3'',2 = +1'6'',7 = +66'',7;$$

$$B = -3'55'',0 - \frac{1}{2}6'',4 - \frac{1}{12}3'',2 = -358'',47 = -238'',47;$$

$$C = +6'',4 - \frac{1}{2}3'',2 = +4'',8;$$

$$D = +3'',2.$$

Тогда формула (8) § 6 в численном виде будет

$$\beta = 5°1'32'',0 + 66'',7\,t - 119'',24\,t^2 + 0'',80\,t^3 + 0'',13\,t^4;$$

$$t_1 = -\frac{A}{B} = +\frac{66'',7}{238'',47} = +0,2797.$$

Дальнейшие приближения выполняются, как показано ниже:

$$C = +4''{,}8 \qquad D = +3''{,}2$$
$$2B = -476{,}94 \qquad 6B = -1430{,}8$$
$$C \ldots 0{,}6812 \qquad D \ldots 0{,}505$$
$$-2B \ldots \underline{2{,}6784} \qquad -6B \ldots \underline{3{,}156}$$
$$\overline{8{,}0028} \qquad \overline{7{,}349}$$
$$t_1^2 \ldots \underline{8{,}8932} \qquad t_1^3 \ldots \underline{8{,}340}$$
$$-\frac{C}{2B}t_1^2 \ldots 6{,}8960 \qquad -\frac{D}{6B}t_1^3 \ldots 5{,}689$$
$$+0{,}000787$$

$t = 0{,}2797 + 0{,}0008 = 0{,}2805$, *или* $t = 0{,}2805 \cdot 12 = 3^{ч}22^{м}{,}0$ 10 марта

$$\beta_m = 5°1'32''{,}0 + 66''{,}7 \cdot 0{,}2805 - 119''{,}24\,(0{,}2805)^2 + 0''{,}80\,(0{,}2805)^3 + 0''{,}13\,(0{,}2805)^4.$$

Если для решения уравнения (1) применить ряд Лагранжа, то искомый ответ получается сразу в таком виде:

$$t = -\frac{A}{B} - \frac{C}{2B}\left(\frac{A}{B}\right)^2 + \frac{D}{6B}\left(\frac{A}{B}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{B}\right)^2\left(\frac{A}{B}\right)^3 + \frac{5}{12}\frac{CD}{B^2}\left(\frac{A}{B}\right)^4. \qquad (3)$$

$$\beta_m = 5°1'32''{,}00$$
$$+ \quad 18{,}71$$
$$- \quad 9{,}38$$
$$+ \quad 0{,}02$$
$$\beta_m = 5°1'41''{,}30 \quad \text{в } 3^{ч}22^{м} \text{ 10 марта.}$$

§ 14. Интерполяционная формула Лагранжа

Если промежутки между значениями аргумента имеют *любые* произвольные величины

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$$

и численные значения функции соответственно равны

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_i, \ldots, y_n,$$

искомая функция y может быть представлена в следующем виде:

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)}\,y_1 +$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)}\,y_2 +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}\,y_{n-1} +$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})}\,y_n,$$

что в сокращенном виде можно представить так:

$$y = \frac{F_1(x)}{K_1} y_1 + \frac{F_2(x)}{K_2} y_2 + \frac{F_3(x)}{K_3} y_3 + \ldots + \frac{F_n(x)}{K_n} y_n,$$

где $F_i(x)$ — целые многочлены $(n-1)$-й степени относительно x, а K_i — некоторые числа, буквы x не заключающие.

Пример. Возьмем для приложения интерполяционной формулы Лагранжа следующие данные:

Аргумент	$x_1 = 9$,	$x_2 = 12$,	$x_3 = 14$,	$x_4 = 15$
Функции	$y_1 = 0{,}1943$.	$y_2 = 0{,}3179$.	$y_3 = 0{,}3837$,	$y_4 = 0{,}4130$

Требуется найти значение функции y для $x = 12^1/_3$.

В сокращенном виде формула Лагранжа будет

$$y = \frac{F_1(12^1/_3)}{K_1} y_1 + \frac{F_2(12^1/_3)}{K_2} y_2 + \frac{F_3(12^1/_3)}{K_3} y_3 + \frac{F_4(12^1/_3)}{K_4} y_4,$$

где

$$F_1(12^1/_3) = (12^1/_3 - 12)(12^1/_3 - 14)(12^1/_3 - 15) = +\frac{40}{27};$$

$$K_1 = (9 - 12)(9 - 14)(9 - 15) = -90;$$

$$F_2(12^1/_3) = (12^1/_3 - 9)(12^1/_3 - 14)(12^1/_3 - 15) = +\frac{400}{27};$$

$$K_2 = (12 - 9)(12 - 14)(12 - 15) = +18;$$

$$F_3(12^1/_3) = (12^1/_3 - 9)(12^1/_3 - 12)(12^1/_3 - 15) = -\frac{80}{27};$$

$$K_3 = (14 - 9)(14 - 12)(14 - 15) = -10;$$

$$F_4(12^1/_3) = (12^1/_3 - 9)(12^1/_3 - 12)(12^1/_3 - 14) = -\frac{50}{27};$$

$$K_4 = (15 - 9)(15 - 12)(15 - 14) = +18;$$

поэтому получим, вынеся общий делитель 243 за скобку:

$$y = \frac{1}{243}(4 \cdot 0{,}1943 + 200 \cdot 0{,}3179 + 72 \cdot 0{,}3837 - 25 \cdot 0{,}4130)$$

или

$$y = \frac{80{,}1042}{243} = 0{,}3296.$$

Числа y_1, y_2, y_3 и y_4, взятые для этого примера, представляю собой увеличенные на 1 четырехзначные логарифмы синусов углов 9°, 12°, 14° и 15°, а потому и число, найденное интерполированием для $x = 12^1/_3$, представляет собой тоже увеличенное на 1 значение lg sin 12°20′, в чем легко убедиться с помощью таблицы 6 МТ-43.

§ 15. Отыскание ошибок с помощью разностей различных порядков

Допустим, что численные значения какой-нибудь функции вычислены для равноотстоящих значений аргумента, и предположим, что какое-нибудь значение функции вычислено с ошибкой ξ, т. е. вместо верного значения y найдено $y+\xi$. Составив последовательные разности,

мы увидим, что влияние этой ошибки ξ все время будет возрастать по мере увеличения порядка разности. Действительно, если взять таблицу функций и разностей, приведенную на стр. 69, и дополнить ее, как показано ниже, то легко проследить с помощью этой таблицы, что ошибка ξ будет входить в последовательные разности с множителями, равными биномиальным коэффициентам (Справочник, вып. 1, отд. 1, гл. 1, § 20) показателя степени, равной порядку разности. Например, в четвертой разности ошибка войдет с множителем 6, а в шестой разности с множителем 20.

Поэтому плавный ход последовательных разностей будет наиболее нарушен как раз против того места таблицы, где допущена ошибка.

Аргумент	Функции	Δ^{I}	Δ^{II}
$a-3w$	y_{-3}		
		$\Delta^{I}_{-5/2}$	
$a-2w$	y_{-2}		Δ^{II}_{-2}
		$\Delta^{I}_{-3/2}$	
$a-w$	y_{-1}		$\Delta^{II}_{-1}+\xi$
		$\Delta^{I}_{-1/2}+\xi$	
a	y_0		$\Delta^{II}_{0}-2\xi$
		$\Delta^{I}_{1/2}-\xi$	
$a+w$	y_1		$\Delta^{II}_{1}+\xi$
		$\Delta^{I}_{3/2}$	
$a+2w$	y_2		Δ^{II}_{2}
		$\Delta^{I}_{5/2}$	
$a+3w$	y_3		

С другой стороны, во всякой правильно составленной математической таблице погрешности табличных чисел могут доходить до $\pm 0{,}5$ единицы последнего знака.

Поэтому в примере, приведенном в § 7, шестые разности оказались неодинаковыми; это следует отнести именно за счет влияния накопления неизбежных погрешностей основных чисел.

Глава 4

НОМОГРАФИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
§ 1. Начальные сведения по номографии	87
§ 2. Понятие об основных видах номограмм	88
§ 3. Построение прямолинейной шкалы	92
§ 4. Номограмма с тремя параллельными шкалами	96
§ 5. Вполне приспособляемая Z-номограмма	101
§ 6. Номограмма с тремя прямолинейными шкалами, сходящимися в одной точке (радиальная номограмма)	105
§ 7. Пропорциональная номограмма с четырьмя переменными	110
§ 8. Построение криволинейной шкалы	112
§ 9. Круговая номограмма	114
§ 10. Параболическая номограмма	119
§ 11. Сдвоенная параболическая номограмма	124
§ 12. Номограмма из выравненных точек с двумя параллельными шкалами и одной криволинейной	125
§ 13. Номограммы из выравненных точек с тремя криволинейными шкалами	127
§ 14. Номограммы с немыми шкалами (графическое исключение переменных)	130
§ 15. Номограммы с бинарным полем и двумя параллельными шкалами	138
§ 16. Номограмма Вейра	140

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

П. В. Мелентьев. Номография, ГТТИ, 1933.

Д. Л. Гавра. Основы номографии.

Н. А. Глаголев. Справочник по номографии.

Н. А. Глаголев. Теоретические основы номографии.

Н. М. Герсеванов. Основания номографического вычисления, 1906—1907.

§ 1. Начальные сведения по номографии

Номография имеет целью сокращение труда при вычислениях по тем или иным уравнениям при помощи особых графиков, называемых номограммами, с которых чисто графическим путем можно снимать готовые решения этих уравнений, не прибегая к самому процессу вычисления.

Поэтому номограммы приобретают особенно важное значение при вычислениях массового или повторного характера по одной и той же формуле.

Применение номограмм позволяет привлекать к вычислениям по этим формулам лиц, не имеющих особой квалификации в области математики.

Термин „номография" произошел от греческих слов „номос" — закон и „графо" — пишу.

Таким образом, номография есть наука о способах графического изображения функций, выражающих зависимость между любым числом переменных величин.

До создания номографии для сокращения вычислений служили таблицы значений функций. Однако для функции даже от трех переменных такие таблицы занимают несколько листов, и пользование ими, в особенности же интерполирование, становится обременительным. Тем более этот недостаток числовых таблиц проявляется при табулировании функций с четырьмя и более переменными.

Номограммы по сравнению с таблицами обладают следующими преимуществами:

1) построение номограммы требует несравненно меньше времени, чем составление таблиц;

2) одна номограмма, начерченная на небольшом листе бумаги, заменяет несколько листов числовых таблиц, что сообщает номограммам полную наглядность и удобство пользования ими;

3) интерполирование при пользовании номограммами производится со значительно большей легкостью, чем на основании табличных данных;

4) увеличение числа независимых переменных не вызывает особого усложнения в пользовании номограммами, тогда как каждая лишняя переменная сильно усложняет таблицы и увеличивает их объем;

5) номография дает возможность графически изображать и производить по номограммам вычисления значений не только явных, но и неявных функций.

§ 2. Понятие об основных видах номограмм

В задачи номографии, как уже было сказано, входит построение специальных графиков, дающих возможность производить вычисления частных значений явных или неявных функций от нескольких переменных.

1. Простейшим случаем является построение графика функции y от одной независимой переменной x, связанных между собой уравнением

$$f(x, y) = 0.$$

Графическим изображением этой зависимости является, как известно, некоторая кривая (AB) в прямоугольной системе декартовых координат (рис. 30), форма которой определяется видом функции $f(x, y)$.

Здесь по заданному значению $x = x_1$ построением,

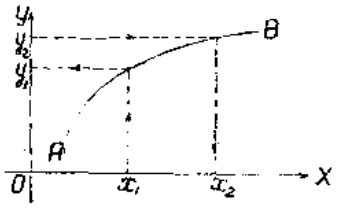

Рис. 30.

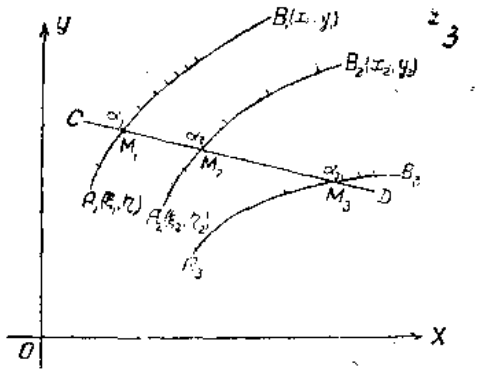

Рис. 31.

указанным на рис. 30, находим графически соответствующее значение y_1 и, наоборот, по заданному значению $y = y_2$ можно определить соответствующее значение $x = x_2$.

Графическое изображение функциональной зависимости между тремя и более переменными требует изучения специальных методов.

В зависимости от вида функциональной зависимости между ними приходится пользоваться соответствующим типом графического построения, которое приводит к тому или иному виду номограммы.

2. Функциональная зависимость между тремя переменными α_1, α_2, α_3 может быть выражена графически *номограммой из выравненных точек*, схематически изображенной на рис. 31.

Эта номограмма состоит из трех кривых (в частном случае прямых): A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3, каждая из которых несет на себе числовые пометки частных значений переменных α_1, α_2, α_3, расставленных так, что, наложив линейку CD на пометки с нужными частными значениями переменных α_1 и α_2 на кривых A_1B_1 и A_2B_2, против линейки на кривой A_3B_3 мы прочитаем частное значение третьей переменной α_3, определяемое функциональной зависимостью вида

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0. \qquad (1)$$

Кривые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 с числовыми на них пометками называются *шкалами*.

Прямая или линейка CD, налагаемая на номограмму для отсчетов, называется индексом или ключом.

3. При помощи введения в номограмму *немых шкал*, или так называемого метода *графического исключения переменных*, может быть построена номограмма из выравненных точек для изображения функциональной зависимости с числом переменных, бо́льшим трех.

Например, чтобы построить номограмму из выравненных точек для функции

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0 \qquad (2)$$

с четырьмя переменными α_1, α_2, α_3, α_4, достаточно ввести в номограмму одну немую шкалу α, для чего преобразуем уравнение (2) к виду

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi(\alpha_3, \alpha_4).$$

Это уравнение можно рассматривать как результат исключения переменной α из системы

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha) &= \varphi(\alpha_1, \alpha_2) \\ f(\alpha) &= \psi(\alpha_3, \alpha_4) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Каждое из уравнений системы (3) содержит по три переменных: α, α_1, α_2 и α, α_3, α_4. Поэтому для каждого из них можно построить номограмму из выравненных точек с тремя переменными. Эти две номограммы можно соединить в одну, сделав шкалу для переменной α, общей для этих номограмм.

Чтобы по заданным значениям α_1, α_2, α_3 определить значение α_4, получающееся из функциональной зависимости (2), по номограмме (рис. 32) достаточно выполнить следующее построение.

На шкалах A_1B_1 и A_2B_2 соединить прямой пометки α_1, α_2, соответствующие заданным значениям этих переменных, и на шкале AB определить значение вспомогательной переменной α в точке C; затем, наложив прямую на точку C и на пометку со значением α_3 на шкале A_3B_3, определить значение α_4 по пометке на шкале A_4B_4 против точки пересечения последней прямой со шкалой A_1B_1.

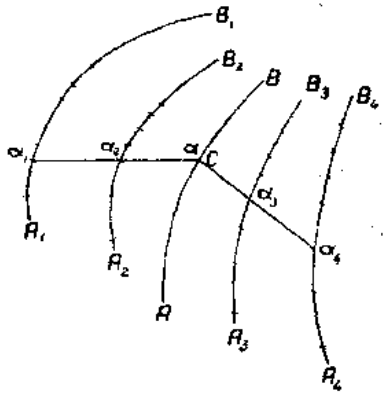

Рис. 32.

При этом, так как значение вспомогательной переменной нас не интересует, то шкалу AB можно не снабжать пометками: она остается *немой шкалой*.

Каждое увеличение числа переменных в функциональной зависимости на одно переменное требует введения в номограмму из выравненных точек одной дополнительной немой шкалы.

Схема построения и пользования номограммой для пяти переменных изображена на рис. 33.

Соединив прямой пометки α_1 и α_2, делаем засечку на немой шкале α_0; соединение этой засечки с пометкой α_3 при помощи второй прямой дает засечку на второй немой шкале α; наконец, против точки пересечения третьей прямой, соединяющей засечку α с пометкой для x_4, со шкалой для переменной x_5 читаем на последней шкале искомое значение переменной x_5, соответствующее заданным значениям переменных x_1, x_2, x_3 и x_4.

Так как введение одной лишней переменной влечет за собой присоединение двух шкал: одной — для самой переменной и второй — немой, то номограммы из выравненных точек становятся неудобными при большом числе переменных.

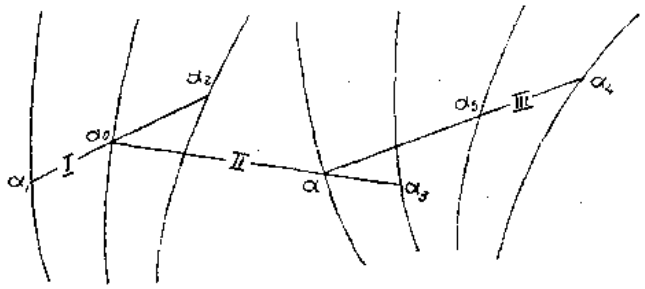

Рис. 33.

4. Вторым средством введения большего числа переменных в номограмму является построение номограммы *с бинарным полем*.

Бинарное поле можно построить, вычертив на плоскости два семейства взаимно пересекающихся кривых.

Если каждую кривую первого семейства пометить частными значениями переменной α (рис. 34), а каждую кривую второго семейства частными значениями переменной β, то в каждой точке A плоскости будут пересекаться кривые, по одной из каждого семейства, соответствующие некоторым частным значениям переменных α и β. Таким образом, каждой точке A плоскости будет соответствовать по одному частному значению переменных α и β, совокупность которых для всех точек рассматриваемой части плоскости образует в ней *бинарное поле*.

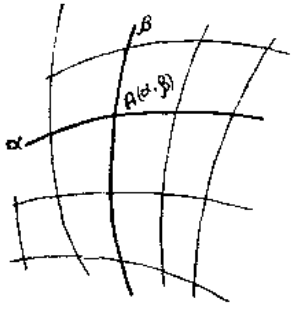

Рис. 34.

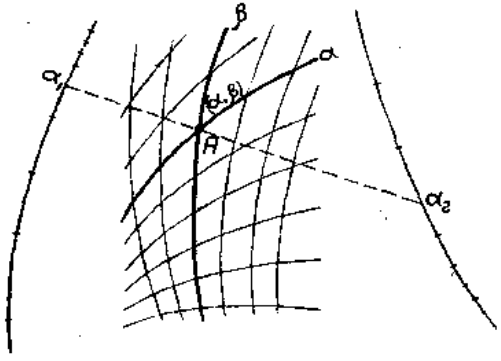

Рис. 35.

Если в состав номограммы из выравненных точек ввести бинарное поле, то число переменных в номограмме увеличится.

На рис. 35 схематически изображена номограмма с двумя криволинейными шкалами из выравненных точек с пометками для переменных α_1 и α_2 и бинарное поле с пометками для переменных α и β;

эта номограмма является средством изображения функциональной зависимости

$$F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha,\ \beta)=0$$

с четырьмя переменными.

Чтобы при помощи этой номограммы определить значение переменной β, определяемое частными значениями переменных α_1, α_2 и α, достаточно соединить прямой пометки α_1 и α_2 на криволинейных шкалах для этих переменных, отметить точку A пересечения этой прямой с кривой бинарного поля, обладающего заданной пометкой α, и прочитать пометку кривой с частным значением β, проходящей через точку A. Легко понять, что та же самая номограмма будет служить для определения любой неизвестной по заданным трем другим.

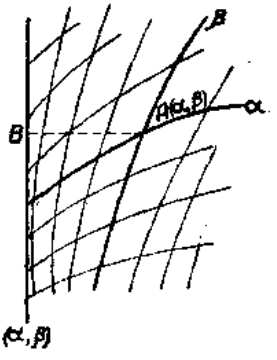

Рис. 36.

5. Средством для увеличения числа переменных в номограмме является также *бинарная шкала*, состоящая из прямой линии с пристроенным к ней бинарным полем (рис. 36).

Чтобы на бинарной шкале найти точку B, соответствующую двум частным значениям переменных α и β, определяющих положение точки A в бинарном поле, пристроенном к прямой, надо из точки A опустить перпендикуляр AB на эту прямую.

На рис. 37 приведена схема номограммы из выравненных точек с тремя параллельными бинарными шкалами. Эта номограмма является средством графического изображения функциональной зависимости

$$F(\alpha_1,\ \beta_1;\ \ \alpha_2,\ \beta_2;\ \ \alpha_3,\ \beta_3)=0$$

с шестью переменными.

Чтобы по пяти заданным значениям переменных α_1, β_1, α_2, β_2 и α_3 определить значение шестой переменной β_3, из точек A_1 и A_2, определяемых кривыми с пометками $(\alpha_1,\ \beta_1)$ и $(\alpha_2,\ \beta_2)$, в первом и втором бинарных полях опускаем перпендикуляры на бинарные шкалы, в основании которых получаем на этих шкалах точки, соответствующие пометкам $(\alpha_1,\ \beta_1)$ и $(\alpha_2,\ \beta_2)$. Эти точки соединяем прямой, которая пересечет третью бинарную шкалу в некоторой точке, пометки которой обозначим $(\alpha_3,\ \beta_3)$. Из этой точки восставим перпендикуляр к бинарной шкале до пересечения его в точке A_3 бинарного поля, обозначенной пометкой α_3. Тогда вторая кривая этого поля, проходящая через точку A_3, будет иметь некоторую пометку β_3, которая и определит значение искомой переменной.

6. Из приведенного обзора основных видов номограмм становятся очевидными следующие требования, которые должны к ним предъявляться практикой их использования:

1) в формулах, подлежащих номографированию, каждая переменная имеет ограниченные пределы своего изменения; поэтому при построении номограммы необходимо заботиться о том, чтобы на шкале для данной переменной уместились ее значения во всем промежутке изменения этой переменной;

2) в целях достижения наибольшей точности при соблюдении предыдущего требования шкала, оставаясь в поле чертежа, должна

достичь наибольшего развития в длину, ибо соблюдение этого условия расширяет возможности более точной градуировки шкалы;

3) взаимное расположение шкал должно быть таким, чтобы при наложении на них линейки для отсчетов последняя не пересекала шкалы под слишком острым углом, что уменьшало бы точность отсчетов;

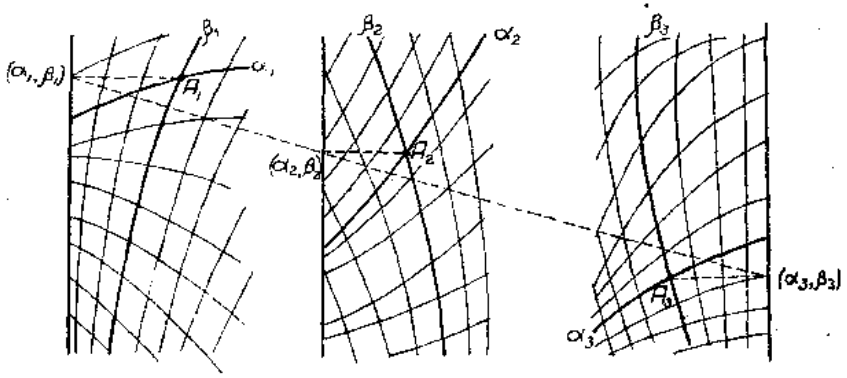

Рис. 37.

4) отдельные шкалы не должны располагаться слишком близко друг от друга: близкое соседство двух шкал влечет за собой неточность отсчетов при наложении линейки;

5) при соблюдении перечисленных условий надо выбирать такой тип номограммы, который требовал бы наименьшего труда и вычислений при ее построении.

Номограммы, удовлетворяющие требованиям, перечисленным в первых четырех пунктах, называются *вполне приспособляемыми номограммами.*

С точки зрения последнего требования, очевидно, наиболее предпочтительными являются номограммы с прямолинейными шкалами.

§ 3. Построение прямолинейной шкалы

Так как основным элементом номограмм из выравненных точек является шкала, то в первую очередь надо решить задачу о построении приспособляемой шкалы, в частности, приспособляемой прямолинейной шкалы.

1. Сначала рассмотрим вопрос о построении *неприспособляемой прямолинейной шкалы* функции

$$y = \varphi(\alpha) \tag{1}$$

и о способе отсчета значения величины y по заданному значению α.

Для построения такой шкалы на прямой OA (рис. 38) выбираем начальную точку O, называемую *началом шкалы.* Затем составляем таблицу значений функции (1) при частных значениях переменной α:

$\alpha =$	α_0	α_1	α_2	. . .	α_n
$y = \varphi(\alpha)$	$y_0 = \varphi(\alpha_0)$	$y_1 = \varphi(\alpha_1)$	$y_2 = \varphi(\alpha_2)$	. . .	$y_n = \varphi(\alpha_n)$

В выбранном масштабе на прямой OA от начала шкалы O откладываем отрезки

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,$$

концы которых отмечают черточками с пометками $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ соответствующих значений переменной α.

Чтобы иметь возможность производить отсчеты значений y по заданным значениям α, параллельно шкале располагается прямая с нанесенными на ней единицами принятого масштаба.

Достаточно прочесть, сколько единиц масштаба соответствует пометке значения переменной $\alpha = \alpha_i$ на шкале OA, чтобы получить соответствующее значение функции $y = y_i$. На рис. 38 в качестве примера приведена шкала функции

$$y = \lg \alpha, \tag{2}$$

называемая *логарифмической шкалой*, весьма часто применяемая в номографии.

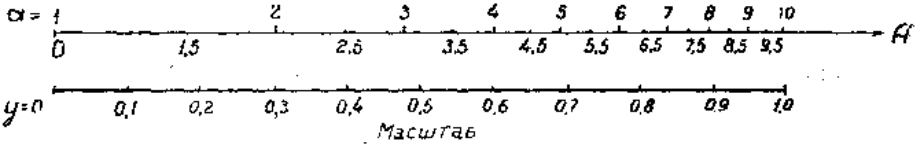

Рис. 38.

Значение переменной $\alpha = \alpha_i$ выбирают так, чтобы они составляли арифметическую прогрессию, т. е. через равные промежутки

$$h = \alpha_{i+1} - \alpha_i. \tag{3}$$

Промежуток h называется *ступенью шкалы*.

Например, на рис. 38 ступень шкалы равна 0,5.

Расстояние между двумя соседними помеченными точками на шкале называется *графическим интервалом*.

При постоянной ступени шкалы графический интервал вообще изменяется с изменением значений переменной α.

Единственной функцией, для которой графический интервал сохраняет постоянную величину, является линейная функция

$$y = A\alpha + B, \tag{4}$$

шкала которой называется поэтому *равномерной шкалой*.

Построенная по указанному выше способу прямолинейная шкала не является приспособляемой в смысле определения, данного в § 2, п. 6.

2. *Для построения приспособляемой прямолинейной шкалы* функции

$$y = f(\alpha) \tag{5}$$

необходимо решить следующую задачу.

На отрезке заданной длины l в выбранном масштабе построить прямолинейную шкалу функции $y = f(\alpha)$ для промежутка (a, b) изменения переменной α.

Решение этой задачи является основным вопросом при построении номограмм с прямолинейными шкалами.

Так как по условию задачи шкала должна удовлетворять двум условиям — заданной длине l шкалы и заданному промежутку (a, b) изменения α, то вместо построения шкалы самой функции $f(\alpha)$ строят шкалу функции

$$y = Af(\alpha) + B \tag{6}$$

с двумя произвольными параметрами A и B, которые определяют из двух приведенных условий задачи.

В формуле (6) параметр A называется ***модулем***, параметр B — ***ориентирным коэффициентом шкалы.***

Чтобы пометка $\alpha = a$ совпала с началом шкалы, где $y = 0$, из уравнения (6) получаем первое уравнение для определения A и B:

$$0 = Af(a) + B.$$

Чтобы пометка $\alpha = b$, соответствующая второй границе промежутка изменения α, совпала с вторым концом шкалы длины l, из формулы (6) получаем второе уравнение:

$$l = Af(b) + B.$$

Таким образом, модуль A и ориентирный коэффициент B определяются из системы уравнений

$$0 = Af(a) + B,$$
$$l = Af(b) + B,$$

откуда

$$A = \frac{l}{f(b) - f(a)}; \qquad B = -\frac{lf(a)}{f(b) - f(a)}, \tag{7}$$

и уравнение шкалы (6) примет следующий окончательный вид:

$$y = l\frac{f(\alpha) - f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{8}$$

Для решения поставленной задачи остается только построить прямолинейную шкалу функции (8) по способу, изложенному в п. 1 этого параграфа.

Формулу (8) можно написать сразу из понятного и геометрически наглядного равенства

$$\frac{y}{l} = \frac{f(\alpha) - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Примечание. При построении шкал в номограммах параметры A и B, вычисленные по формулам (7), обычно несколько округляют для упрощения расчета шкалы. Это округление влечет за собой незначительное изменение длины l шкалы и небольшой сдвиг ее начальной точки, что не имеет существенного значения при составлении всей номограммы.

Пример. Построить логарифмическую шкалу длиной 15 *см* для промежутка (2, 4) изменения независимой переменной α.

Здесь

$$f(\alpha) = \lg \alpha, \quad l = 15, \quad a = 2, \quad b = 4.$$

По формуле (8)

$$y = 15\frac{\lg \alpha - \lg 2}{\lg 4 - \lg 2} = 15\frac{\lg \frac{\alpha}{2}}{\lg 2} \approx 50 \lg \frac{\alpha}{2}.$$

Приняв ступень шкалы $h=0{,}2$, составляем таблицу:

$\alpha =$	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
$50 \lg \frac{\alpha}{2} =$	0	2,07	3,96	5,69	7,31	8,80	10,2	11,52	12,76	13,94	15,0

Построенная по условиям задачи логарифмическая шкала будет иметь следующий вид (рис. 39).

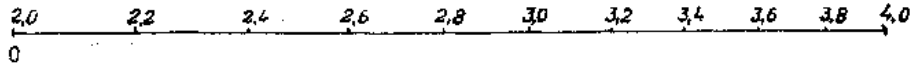

Рис. 39.

Пример. Построить шкалу $\sin\alpha$, взяв $l=20$ *см* для промежутка $0°-90°$ изменения переменной α и приняв ступень шкалы равной $5°$. Так как $\sin 0°=0$, а $\sin 90°=1$, то по формуле (7) находим:

$$\text{Модуль } A=\frac{20\ см}{1-0}=20\ см=200\ мм.$$

$$\text{Ориентирный коэффициент } B=-\frac{200\ мм}{1},$$

поэтому уравнение шкалы (8) примет такой вид:

$$y=200\,\frac{\sin\alpha-0}{1-0}=200\sin\alpha.$$

α, град.	$\sin\alpha$	y, *мм*	α, град.	$\sin\alpha$	y, *мм*
0	0,0000	0,0	45	0.7071	141,4
5	0,0872	17,4	50	0,7660	153,2
10	0,1736	34,7	55	0,8192	163,8
15	0,2588	51,8	60	0,8660	173,2
20	0,3420	68,4	65	0,9063	181,7
25	0,4226	84,5	70	0,9397	187,9
30	0,5000	100,0	75	0,9659	193,2
35	0,5786	114,7	80	0,9848	197,0
40	0,6428	128,6	85	0,9962	199,2
45	0,7071	141,4	90	1,0000	200,0

Построенная на основании данных этой таблицы шкала $\sin\alpha$ представлена на рис. 40, который показывает, насколько такая шкала

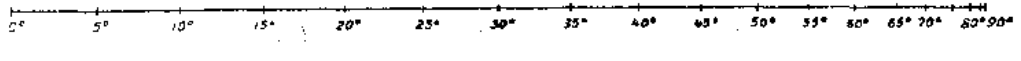

Рис. 40.

неравномерна: в начале шкалы ее ступень помещается на протяжении 17,4 *мм*, а в конце всего на 0,8 *мм*.

Если $\varphi(a)$ или $\varphi(b)$ обращаются в бесконечность, то такую прямолинейную (или криволинейную) шкалу построить невозможно.

§ 4. Номограмма с тремя параллельными шкалами

Тип решаемого уравнения

$$f_3(a_3) = f_1(a_1) + f_2(a_2).$$

Номограмма из выравненных точек с тремя параллельными шкалами есть частный вид номограммы из выравненных точек с тремя шкалами, понятие о которой дано в § 2, п. 2.

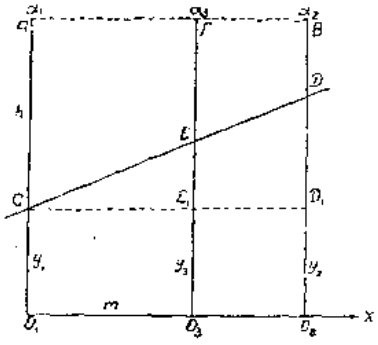

Рис. 41.

Поэтому она пригодна для графического изображения только частного вида уравнения (1) § 2, связывающего три переменные a_1, a_2, a_3.

Для выяснения этого частного вида уравнения (1) § 2 надо составить уравнение, связывающее геометрические элементы номограммы, которое условимся в дальнейшем называть уравнением *геометрической связи*. При составлении этого уравнения используем свойство подобных треугольников.

Совместим ось OY прямоугольной системы координат со шкалой для переменной a_1, а начало всех трех шкал для переменных a_1, a_2 и a_3 расположим на оси OX в точках O_1, O_2, O_3 (рис. 41).

Пересечем шкалы прямою CD (индексом), при помощи которой производится отсчет значений переменных по номограмме.

Обозначим:

$$O_1C = y_1, \quad O_2D = y_2, \quad O_3E = y_3,$$
$$O_1O_2 = l, \quad O_1O_3 = m, \quad O_1A = O_2B = O_3F = h.$$

Из подобия $\triangle CEE_1$ и $\triangle CDD_1$ имеем

$$\frac{EE_1}{CE_1} = \frac{DD_1}{CD_1}$$

или, на основании введенных обозначений,

$$\frac{y_3 - y_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{l},$$

откуда

$$\frac{y_3}{m} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{l}\right) y_1 + \frac{y_2}{l}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) и есть искомое уравнение геометрической связи для номограммы рассматриваемого типа.

С точки зрения уравнения шкал

$$y_1 = \varphi_1(a_1), \quad y_2 = \varphi_2(a_2) \quad \text{и} \quad y_3 = \varphi_3(a_3).$$

Таким образом, уравнение (1), а следовательно, и номограмма из выравненных точек с тремя параллельными шкалами выражают функциональную зависимость вида

$$f_3(a_3) = f_1(a_1) + f_2(a_2), \qquad (2)$$

являющуюся частным видом уравнения (1) § 1.

Чтобы построить для уравнения (2) вполне приспособляемую номограмму, надо это уравнение преобразовать тождественно так, чтобы вывести из него уравнение вполне приспособляемых шкал для переменных α_1, α_2 и α_3 в виде уравнения (6) § 3.

Для этого умножим уравнение (2) на произвольный множитель A, после чего к обеим частям равенства прибавим сумму $B+C$ двух произвольных постоянных; тогда

$$Af_3(\alpha_3)+B+C=Af_1(\alpha_1)+B+Af_2(\alpha_2)+C.$$

Чтобы последнее уравнение совпало с уравнением геометрической связи (1), должны быть соблюдены равенства

$$\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{l}\right)y_1=Af_1(\alpha_1)+B;$$

$$\frac{y_2}{l}=Af_2(\alpha_2)+C;$$

$$\frac{y_3}{m}=Af_3(\alpha_3)+B+C,$$

откуда для шкал переменных α_1, α_2, α_3 получаем следующие уравнения:

$$y_1=A\frac{ml}{l-m}f_1(\alpha_1)+B\frac{ml}{l-m};$$
$$y_2=Alf_2(\alpha_2)+Cl;$$
$$y_3=Amf_3(\alpha_3)+Bm+Cm.$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A_1&=A\frac{ml}{l-m}, & B_1&=B\frac{ml}{l-m}\\ A_2&=Al, & B_2&=Cl, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

при помощи которых уравнения шкал для независимых переменных α_1 и α_2 можно написать так:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=A_1f_1(\alpha_1)+B_1\\ y_2&=A_2f_2(\alpha_2)+B_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Из уравнения (3) имеем

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{m}{l-m},$$

откуда

$$m=\frac{l}{1+\dfrac{A_2}{A_1}}. \qquad (5)$$

Если A_1 и A_2 одинаковых знаков, то $m<l$, а если они разных знаков, то $m>l$.

Из тех же уравнений (3) и формулы (5)

$$Am=\frac{l-m}{l}A_1=\left(1-\frac{m}{l}\right)A_1=\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2};$$

$$Bm+Cm=\frac{l-m}{l}B_1+\frac{m}{l}B_2=\frac{A_2B_1}{A_1+A_2}+\frac{A_1B_2}{A_1+A_2}=\frac{A_1B_2+A_2B_1}{A_1+A_2},$$

и уравнение для шкалы третьей переменной примет вид:

$$y_3 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} f_3(\alpha_3) + \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{A_1 + A_2}. \qquad (6)$$

Из формул (3) следует, что числа A_1, A_2, B_1 и B_2 являются произвольными вследствие произвольности первоначально введенных постоянных A, B, C и расстояния m. Поэтому уравнения шкал (4) являются вполне приспособляемыми.

Расчет и построение номограммы производится в следующем порядке:

1) по заданным пределам изменения переменных α_1 и α_2 и высоте h номограммы определяют модули A_1 и A_2 и ориентирные коэффициенты B_1 и B_2 по формулам (7) § 3, принимая вместо l величину h;

2) по формуле (5) вычисляют m, причем l выбирают в зависимости от размера номограммы;

3) по формулам (4) и (6) составляют уравнения шкал для переменных α_1, α_2, α_3;

4) шкалы для этих переменных располагают, как указано на рис. 41, и градуируют при помощи уравнений, полученных в предыдущем пункте.

Пример. Рассчитать и построить номограмму с тремя параллельными шкалами для нахождения поправки времени захода или восхода Солнца по формуле

$$\Delta\tau = \frac{3^м,67\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi + \cos 2\delta}}.$$

Чтобы выражение привести к типу уравнения (2), возведем его в квадрат; тогда получим:

$$\frac{(3^м,67\sqrt{2})^2}{(\Delta\tau)^2} = \cos 2\varphi + \cos 2\delta,$$

или

$$\frac{26,89}{(\Delta\tau)^2} = \cos 2\varphi + \cos 2\delta,$$

которое имеет вид уравнения (2), если считать, что

$$f_3(\alpha_3) = \frac{26,69}{(\Delta\tau)^2}, \quad f_1(\alpha_1) = \cos 2\varphi, \quad f_2(\alpha_2) = \cos 2\delta.$$

Пределы переменных возьмем: по φ от 0° до 55°, по δ от 0° до 24° и соответственно этому пределы $\Delta\tau$ от $3^м,7$ до $9^м,1$.

Примем размеры номограммы: $h = 100$ *мм*; $l = 90$ *мм*.

Для первой шкалы $y_1 = A_1 \cos 2\varphi + B_1$ находим по формуле (7) § 3:

$$A_1 = \frac{180}{110° - \cos 0} = \frac{180}{1,3420} = -134,12 \text{ мм},$$

$$B_1 = +134,12 \text{ мм},$$

а по формуле (8) § 3 получаем уравнение шкалы y:

$$y_1 = 268,24 \sin^2 \varphi. \qquad (*)$$

Для второй шкалы $y_2 = A_2 \cos 2\delta + B_2$ таким же приемом находим:

$$A_2 = \frac{180}{\cos 48^\circ - 1.0} = \frac{180}{0,6691 - 1,0} = -\frac{180}{0,3309} = -544,02 \text{ мм},$$

$$B_2 = +544,02 \text{ мм},$$

и уравнение второй шкалы y_2 будет

$$y_2 = 1088,04 \sin^2 \delta \qquad (**)$$

По уравнению (6) вычисляем третью шкалу y_3, приняв найденные значения модулей A_1 и A_2 и ориентирных коэффициентов B_1 и B_2, и получаем

$$y_3 = -\frac{2893,2}{(\Delta\tau)^2} + 215,20. \qquad (***)$$

Наконец, по формуле (5) находим отстояние m третьей шкалы от первой:

$$m = 17,80 \text{ мм}.$$

В приведенной ниже таблице даны результаты вычисления части делений всех трех шкал этой номограммы.

Шкала $y_1 = 268,24 \sin^2 \varphi$		Шкала $y_2 = 1088,04 \sin^2 \delta$		Шкала $y_3 = 215,20 - \frac{2893,2}{(\Delta\tau)^2}$	
φ, град.	y_1, мм	δ, град.	y_2, мм	$\Delta\tau$	y_3, мм
0	0,00	0	0,00	3,7	3,06
5	2,04	2	1,33	4,1	43,09
10	8,09	4	5,30	4,5	72,33
15	17,97	6	11,89	4,9	94,70
20	31,38	8	21,06	5,3	112,20
25	47,91	10	32,80	5,7	126,15
30	67,06	12	47,03	6,1	137,45
35	88,25	14	63,68	6,5	146,72
40	110,83	16	82,67	6,9	154,43
45	134,12	18	103,90	7,3	160,91
50	157,41	20	127,28	7,7	166,40
55	180,00	22	152,68	8,1	171,10
		24	180,00	8,5	175,16
				8,9	178,67

Проведем линию длиной 100 мм, примем ее за шкалу y_1 (широту φ) и нанесем деления сообразно полученным значениям y_1; в расстоянии от нее, равном 17,80 мм, проводим другую линию, параллельную первой, и градуируем ее сообразно делениям третьей шкалы y_3 (искомые поправки $\Delta\tau$). В расстоянии 90 мм от первой шкалы проводим третью параллельную шкалу для y_2 и наносим соответственные деления шкалы склонения.

При построении номограммы следует вычислять все основные деления шкал таким образом: шкалу широт и склонений через 1°, а шкалу поправок через $0^м,1$.

Построенная по этим данным номограмма 1 приведена на рис. 42. Ключ номограммы показан пунктиром: для $\varphi = 50°$ и $\delta = 17°$ поправка $\Delta\tau$ времени захода (восхода) равна $6,^{м}4$, что читаем на средней

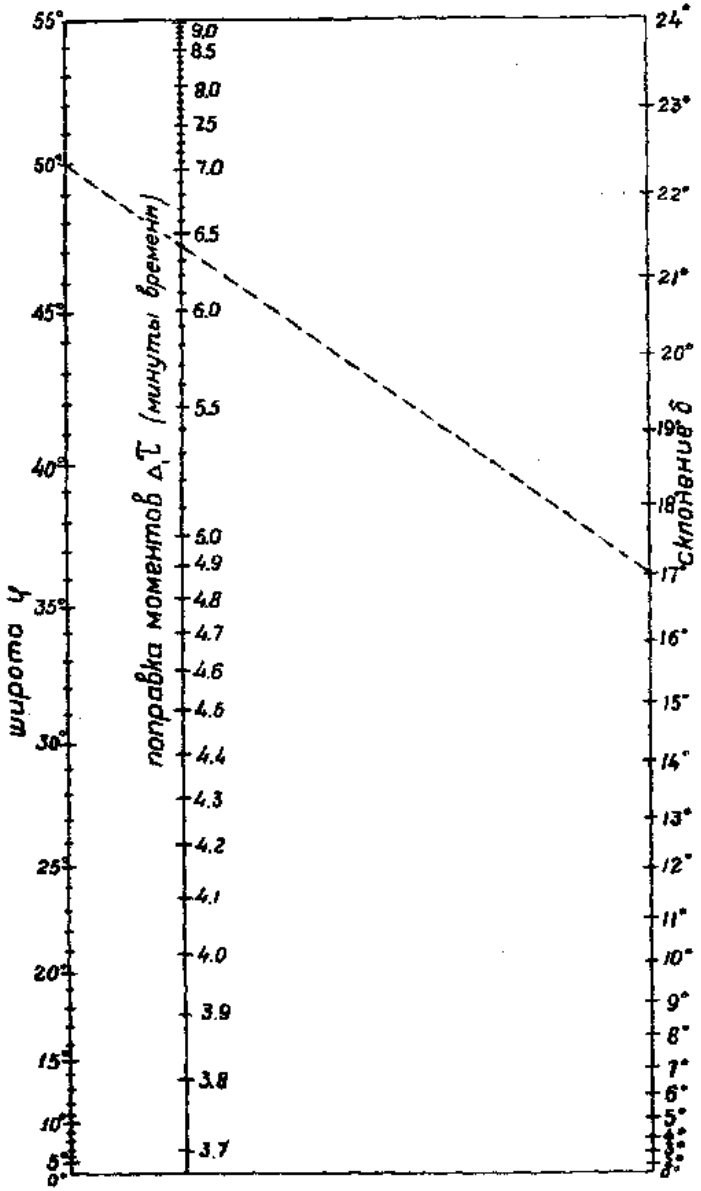

Рис. 42.

шкале, приложив линейку к делениям 50° левой шкалы (широта) и делению 17° (склонение).

По этому типу можно построить номограмму для определения расстояния s, с которого откроется предмет высотой h для глаза

наблюдателя, находящегося на возвышении e, вычисляя s по формуле

$$s = 2 = 10\sqrt{e} + 2 = 10\sqrt{h},$$

где e и h выражены в метрах, s — в морских милях.

Примечание. К виду уравнения (2) можно привести уравнение вида $\varphi_3(\alpha_3) = \varphi_1(\alpha_1)\cdot\varphi_2(\alpha_2)$, представляющее произведение двух функций. Логарифмируя обе части, получим зависимость $\lg \varphi_3(\alpha_3) = \lg \varphi_1(\alpha_1) + \lg \varphi_2(\alpha_2)$, которая вполне аналогична (2), стоит только положить $f_i(\alpha_i) = \lg \varphi_i(\alpha_i)$.

Если для заданных изменений переменных ни одна из функций $\varphi_i(\alpha_i)$ не обращается ни в ноль, ни в бесконечность, то уравнение $\varphi_3(\alpha_3) = \varphi_1(\alpha_1)\,\varphi_2(\alpha_2)$ может быть решено с помощью номограммы, состоящей из трех параллельных шкал. Однако надо иметь в виду, что логарифмические шкалы чрезвычайно неравномерны и при заданных размерах номограммы и значительных пределах переменных графический интервал может сделаться очень малым.

§ 5. Вполне приспособляемая Z-номограмма

Тип решаемого уравнения

$$f_3(\alpha_3) = \frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)}.$$

Z-номограмма является также номограммой из выравненных точек и состоит из трех прямолинейных шкал; название номограммы происходит от ее формы, приведенной на рис. 43.

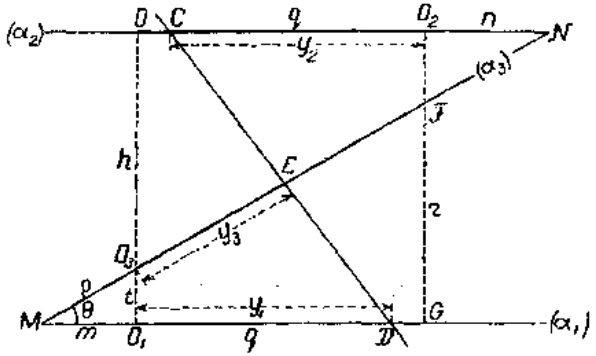

Рис. 43.

Для построения Z-номограммы и вывода формул, по которым она может быть рассчитана, проведем две параллельные прямые $ON \parallel O_1G$ и пересечем их прямой.

Выделим часть этой фигуры между прямыми O_1O и GO_2, перпендикулярными к прямым ON и O_1G, расстояние между которыми задано

$$O_1O = GO_2 = h.$$

Шкалу для переменной α_1 расположим по прямой O_1G с началом в точке O_1; для переменной α_2 вдоль NO с началом в точке O_2 и для α_3 вдоль MN с началом в точке O_3.

Наложим на эти шкалы индекс CD, по которому производится отсчет значений α_1, α_2, α_3. Введем обозначения постоянных отрезков:

$$MO_1 = m, \quad NO_2 = n, \quad MO_3 = p, \quad MN = l, \quad O_1O = h,$$
$$OO_2 = O_1G = q, \quad O_1O_3 = t, \quad GF = r;$$

переменными же отрезками являются

$$y_1 = \varphi_1(\alpha_1) = O_1D; \quad y_2 = \varphi_2(\alpha_2) = O_2C; \quad y_3 = \varphi_3(\alpha_3) = O_3E.$$

Уравнение геометрической связи этой номограммы, т. е. уравнение между y_1, y_2, y_3, получим из подобия $\triangle MDE$ и $\triangle NCE$

$$\frac{MD}{NC} = \frac{ME}{NE}$$

или, на основании введенных обозначений,

$$\frac{m + y_1}{n + y_2} = \frac{p + y_3}{l - p - y_3}. \tag{1}$$

Последнее уравнение показывает, что при помощи Z-номограммы можно производить расчет функциональной зависимости вида

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = f_3(\alpha_3). \tag{2}$$

Преобразуем уравнение (2) тождественно так, чтобы вывести из него вполне приспособляемые уравнения шкал в виде уравнения (6) § 3, для чего перепишем его в виде

$$\frac{A_1 f_1(\alpha_1)}{A_2 f_2(\alpha_2)} = \frac{A_1 f_3(\alpha_3)}{A_2}.$$

Последнее уравнение совпадет с уравнением геометрической связи (1), если

$$A_1 f_1(\alpha_1) = m + y_1$$
$$A_2 f_2(\alpha_2) = n + y_2$$
$$\frac{A_2 f_3(\alpha_3)}{A_2} = \frac{p + y_3}{l - p - y_3}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 f_1(\alpha_1) - m \\ y_2 &= A_2 f_2(\alpha_2) - n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$y_3 = \frac{A_1 l f_3(\alpha_3)}{A_1 f_3(\alpha_3) + A_2} - p, \tag{4}$$

$$l = \sqrt{h^2 + (m + n + q)^2} = (m + n + q)\sec\theta, \tag{4}^*$$

где

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{m + n + q}.$$

Вследствие произвольностей множителей A_1 и A_2 и отрезков m и n первые два уравнения (3) шкал для α_1 и α_2 имеют вид уравнения (8), т. е. являются вполне приспособляемыми.

Определив A_1, A_2, m и n на основании заданных пределов изменения α_1 и α_2 по правилам § 3, остается найти величину p, входящую в уравнение (4) шкалы переменной α_3.

Из рис. 43 очевидно, что

$$\frac{p}{m} = \frac{l}{m + n + q} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}},$$

откуда

$$p = \frac{lm}{m + n + q} = m \sec \theta. \qquad (5)$$

Расчет и построение Z-номограммы производится в следующем порядке:

1) по заданным пределам изменений независимых переменных α_1 и α_2 определяем величины A_1, A_2, m, n и l в уравнениях (3) и (4);

2) по формуле (5) вычисляем p;

3) по формулам (3) и (4) составляем уравнения шкал для переменных α_1, α_2, α_3;

4) шкалы для этих переменных располагаем, как указано на рис. 43, и градуируем при помощи уравнений (3) и (4), коэффициенты которых известны на основании предшествовавших вычислений;

кроме того,

5) чтобы провести линию O_3F шкалы y_3, надо найти отрезки O_1O_3 и GF по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} O_1O_3 = t &= \frac{ph}{l} = \sqrt{p^2 - m^2} = m \operatorname{tg} \theta \\ GF = r &= \left(\frac{m+q}{m}\right)\frac{ph}{l} = t + q \operatorname{tg} \theta \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

Пример. Рассчитать и построить Z-номограмму для определения поправки азимута видимого захода или восхода, вычисляемой по формуле

$$\Delta a = \frac{0^0,917 \operatorname{tg} \varphi}{\sin a_0},$$

где a_0 — азимут истинного захода (восхода),
φ — широта места.

Пределы переменных	Размеры номограмм
α_0 — от 45° до 90°,	$h = 100$ *мм*,
φ_0 — от 0° до 55°,	$q = 150$ „
Δa — от 0° до 1°,85.	

Здесь $f_1(\alpha_1) = 0^0917 \operatorname{tg} \varphi$, $f_2(\alpha_2) = \sin a_0$, $f_3(\alpha_3) = \Delta a$.
По формулам (3), (4), (5) и (6) находим, что

$$A_1 = 114,6 \text{ мм} \qquad A_2 = 512,2 \text{ мм}$$
$$m = 0 \qquad n = 362,2 \text{ „}$$
$$p = 0 \qquad l = 521,8 \text{ „}$$
$$t = 0$$
$$r = 29,3 \text{ мм}.$$

Уравнения шкал:

$$y_1 = 105,1 \operatorname{tg} \varphi,$$
$$y_2 = 512,2 \sin a_0 - 362,2,$$
$$y_3 = 521,8 \frac{\Delta a}{\Delta a + 4,472}.$$

В приведенной ниже таблице даны вычисления части всех трех шкал.

Шкала y_1		Шкала y_2		Шкала y_3	
φ, град.	y_1, *мм*	a_0, град.	y_2, *мм*	Δa, град.	y_3, *мм*
5	9,2	50	30,1	0,1	11,4
10	18,5	55	57,4	0,3	32,8
15	28,2	60	81,4	0,5	52,5
20	38,3	65	102,0	0,7	70,7
25	49,0	70	119,1	0,9	87,5
30	60,7	75	132,5	1,1	103,1
35	73,6	80	142,2	1,3	117,6
40	88,2	85	148,1	1,5	131,1
45	105,1	90	150,0	1,7	143,8
50	125,2			1,9	155,7
55	150,0				

Для вычерчивания этой номограммы (рис. 44) строим прямоугольник высотой $h = 100$ *мм* и основанием $q = 150$ *мм*. Первую шкалу y_1

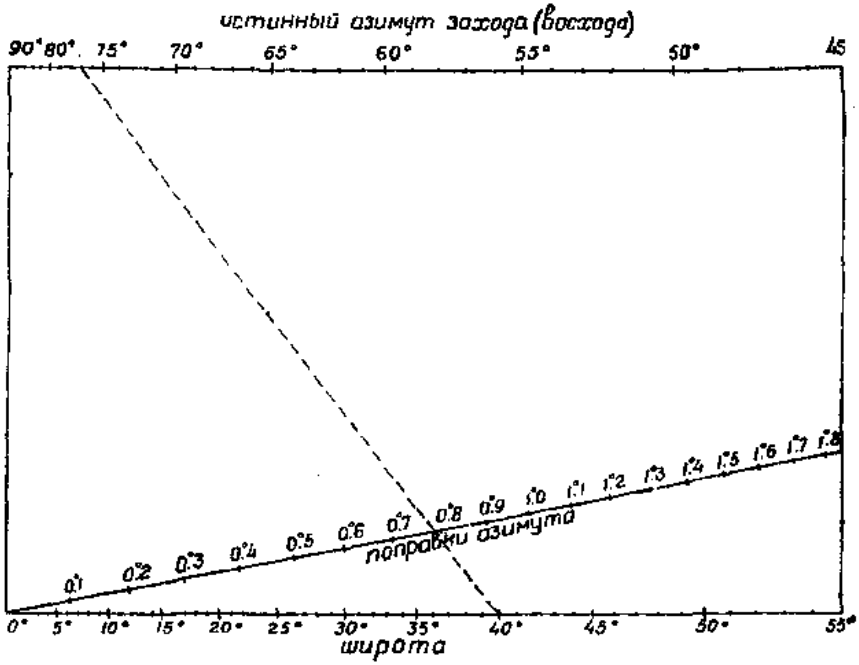

Рис. 44.

наносим на нижней стороне, вторую y_2 на верхней. Чтобы нанести опору третьей шкалы y_3, от нижнего правого угла откладываем $r = 29{,}3$ и соединяем эту точку с началом координат. От этой точки наклонной линии наносим шкалу y_3. Ключ к номограмме показан пунктиром. Так, при $a_0 = 77°$ и $\varphi = 40°$ поправка азимута $\Delta a = 0°{,}8$, поэтому азимут видимого захода будет $77°{,}8$ *NW*.

§ 6. Номограмма с тремя прямолинейными шкалами, сходящимися в одной точке (радиальная номограмма)

Тип решаемого уравнения:

$$\frac{1}{f_3(a_3)} = \frac{1}{f_1(a_1)} + \frac{1}{f_2(a_2)}.$$

Три прямолинейные шкалы рассматриваемой номограммы имеют общую точку пересечения O.

Общая схема номограммы изображена на рис. 45.

Для вывода уравнения геометрической связи расположим шкалу переменной a_1 по оси OX, шкалу переменной a_2 по оси OY косоугольной системы координат XOY и угол между осями координат OX и OY, а следовательно, и между шкалами для переменных a_1 и a_2 обозначим через ω.

Третью прямолинейную шкалу для переменной a_3 расположим по биссектрисе OE угла XOY.

Наложив на номограмму индекс CD, который пересечет шкалу переменной a_3 в точке E, введем следующие обозначения отрезков, изображенных на рис. 45:

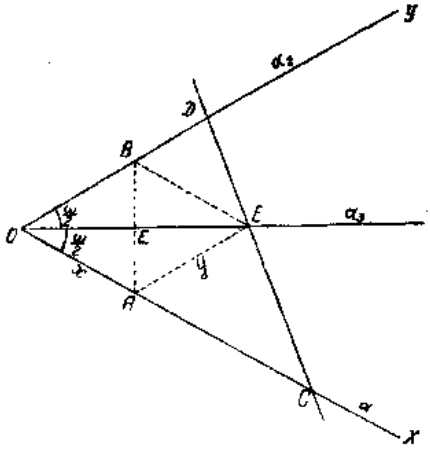

Рис. 45.

$$OC = y_1 = \varphi_1(a_1); \quad OE = y_3 = \varphi_3(a_3); \quad OD = y_2 = \varphi_2(a_2);$$

проведем

$$BE \parallel OX, \quad AE \parallel OY.$$

Так как OE есть биссектриса угла XOY, то

$$OE_1 = \frac{OE}{2} = \frac{y_3}{2} \quad \text{и} \quad OB = OA,$$

а из $\triangle OBE$

$$OE_1 = \frac{y_3}{2} = OB \cos\frac{\omega}{2}. \tag{1}$$

Уравнение прямой CD в системе координатных осей XOY, взятое в форме уравнения в отрезках на осях, имеет вид

$$\frac{x}{y_1} + \frac{y}{y_2} = 1, \tag{2}$$

где x и y — текущие координаты прямой CD согласно введенным выше обозначениям.

Так как точка E лежит на прямой (2), то ее координаты $x = y$, равные величинам отрезков $OB = OA$, должны удовлетворять урав-

нению (2), что приводит к следующему искомому уравнению геометрической связи

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{2}{y_3}\cos\frac{\omega}{2}, \tag{3}$$

ибо из равенства (1)

$$OB = OA = \frac{y_3}{2\cos\frac{\omega}{2}}.$$

Положим теперь

$$y_1 = lf_1(\alpha_1), \quad y_2 = lf_2(\alpha_2) \quad \text{и} \quad y_3 = l_3 f_3(\alpha_3)$$

и, подставляя эти выражения в уравнение (3), получим

$$\frac{1}{f_1(\alpha_1)} + \frac{1}{f_2(\alpha_2)} = \frac{2l\cos\frac{\omega}{2}}{l_3 f_3(\alpha_3)}.$$

Если принять, что

$$l_3 = 2l\cos\frac{\omega}{2}, \tag{4}$$

то получим

$$\frac{1}{f_1(\alpha_1)} + \frac{1}{f_2(\alpha_2)} = \frac{1}{f_3(\alpha_3)}. \tag{5}$$

Таким образом, радиальная номограмма применима для графического изображения функциональной зависимости вида (5), которая по своему характеру ничем не отличается от функциональной зависимости (2), рассмотренной в § 4 и изображаемой номограммой с тремя параллельными шкалами. В самом деле, если положить

$$\frac{1}{f_1(\alpha_1)} = \varphi_1(\alpha_1), \quad \frac{1}{f_2(\alpha_2)} = \varphi_2(\alpha_2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{f_3(\alpha_3)} = \varphi_3(\alpha_3),$$

то получим вместо (5)

$$\varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_2) = \varphi_3(\alpha_3), \tag{6}$$

что и представляет зависимость (2) § 4.

Выведем теперь формулы, по которым может быть рассчитана вполне приспособляемая номограмма рассматриваемого вида, для чего уравнение (5) преобразуем тождественно, введя в него модули и ориентирные коэффициенты.

Умножив уравнение (5) на произвольный множитель A и прибавив после этого к обеим частям произвольное число $2B$, получим

$$\frac{A}{f_1(\alpha_1)} + B + \frac{A}{f_2(\alpha_2)} + B = \frac{A}{f_3(\alpha_3)} + 2B.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением геометрической связи (3), если будут соблюдены условия:

$$\frac{A}{f_1(\alpha_1)} + B = \frac{l}{y_1}, \quad \frac{A}{f_2(\alpha_2)} + B = \frac{l}{y_2}, \quad \frac{A}{f_3(\alpha_3)} + 2B = \frac{2l}{y_3}\cos\frac{\omega}{2}.$$

откуда получаем следующие уравнения шкал переменных α_1, α_2 и α_3:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{l f_1(\alpha_1)}{B f_1(\alpha_1) + A} \\ y_2 &= \frac{l f_2(\alpha_2)}{B f_2(\alpha_2) + A} \\ y_3 &= \frac{l f_3(\alpha_3)}{2B f_3(\alpha_3) + A} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

В этих формулах l — длина боковых шкал, а $l\cos\frac{\omega}{2}$ — длина средней шкалы.

Уравнения (7) можно представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{l}{A\frac{1}{f_1(\alpha_1)} + B} \\ y_2 &= \frac{l}{A\frac{1}{f_2(\alpha_2)} + B} \\ y_3 &= \frac{2l\cos\frac{\omega}{2}}{A\frac{1}{f_3(\alpha_3)} + 2B} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Расчет и построение номограммы производится в следующем порядке:

1) по заданным пределам изменения независимых переменных α_1, α_2 в формулах (7) и (8) определяют коэффициенты A, B, задавшись предварительно длиной l шкалы переменных α_1 и α_2; длина шкалы переменной α_3 равна $l\cos\frac{\omega}{2}$; обычно угол ω берут равным 60°;

2) шкалы всех трех переменных градуируются при помощи уравнений (8), причем вся номограмма располагается в соответствии с рис. 45.

Примечание. Хотя выше было сказано, что номограмма с тремя шкалами, сходящимися в одной точке, может служить для изображения функциональной зависимости того же вида, что и номограмма с тремя параллельными шкалами, однако рассматриваемая номограмма имеет то большую общность, что позволяет дать графическое изображение зависимости вида (2) или (5) на номограмме конечных размеров даже в том случае, когда функции $f_1(\alpha_1)$, $f_2(\alpha_2)$, $f_3(\alpha_3)$ изменяются от 0 до ∞, как это видно из уравнений шкал (7) или (8); номограмма же с параллельными шкалами в этом случае имела бы бесконечно длинные шкалы.

Для пояснения изложенной выше теории приведем пример.

Пример. Построить радиальную номограмму для решения уравнения

$$\sin\alpha_3 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

при изменении переменных α_1, α_2 и α_3 от 0° до 90°, приняв для стороны разностороннего треугольника длину $l = 200$ *мм*.

Чтобы привести это выражение к виду (5), логарифмируем его при основании 10:

$$\lg\sin\alpha_3 = \lg\sin\alpha_1 + \lg\sin\alpha_2,$$

что можно тождественно представить так:

$$\frac{1}{\frac{-1}{\lg \sin \alpha_3}} = \frac{1}{\frac{-1}{\lg \sin \alpha_1}} + \frac{1}{\frac{-1}{\lg \sin \alpha_2}}.$$

Отсюда следует, что надо положить

$$f_1(\alpha_1) = \frac{-1}{\lg \sin \alpha_1} = \frac{1}{+\lg \operatorname{cosec} \alpha_1};$$

$$f_2(\alpha_2) = \frac{-1}{\lg \sin \alpha_2} = \frac{1}{+\lg \operatorname{cosec} \alpha_2};$$

$$f_3(\alpha_3) = \frac{-1}{\lg \sin \alpha_3} = \frac{1}{+\lg \operatorname{cosec} \alpha_3}.$$

Поэтому по формулам (8) уравнения шкал будут

$$y_1 = \frac{l}{B + A \lg \operatorname{cosec} \alpha_1}; \quad y_2 = \frac{l}{B + A \lg \operatorname{cosec} \alpha_2};$$

$$y_3 = \frac{2l \cos \frac{\omega}{2}}{2B + A \lg \operatorname{cosec} \alpha_3}.$$

Определим постоянные

при $\alpha_1 = 0 \quad y_1 = 0$; при $\alpha_1 = 90° \quad y_1 = l = \frac{l}{B}$;

при $\alpha_2 = 0 \quad y_2 = 0$; при $\alpha_2 = 90° \quad y_2 = l = \frac{l}{B}$.

Отсюда $B = 1$.

Поэтому

$$y_1 = \frac{l}{1 + A \lg \operatorname{cosec} \alpha} = y_2; \quad y_3 = \frac{2l \cos \frac{\omega}{2}}{2 + A \lg \operatorname{cosec} \alpha_3}.$$

Таким образом, постоянная A не может быть определена по размерам шкал.

Легко видеть, что постоянная A определяет скорость изменения делений шкалы, т. е. ту величину, которую выше мы назвали графическим интервалом. Обозначая его через Δ, получим, дифференцируя выражение y_1 по α:

$$\Delta = \frac{lA \mu \operatorname{ctg} \alpha}{(1 + A \lg \operatorname{cosec} \alpha)^2}, \tag{9}$$

откуда видно, что Δ зависит главным образом от величины α. Нетрудно понять, что сделать шкалы y_1 и y_2 равномерными нельзя. Если принять $A = 10$, то графический интервал Δ изменяется от $\Delta_м = 3{,}5$ *мм* при $\alpha = 66°{,}2$ до $\Delta_m = 1{,}15$ *мм* при $\alpha = 10°{,}6$.

Рассчитать и построить радиальную номограмму, приняв $l = 200$ *мм*: тогда расчетные формулы для шкал при $A = 10$ будут

$$y_1 = y_2 \frac{200}{1 + 10 \lg \operatorname{cosec} \alpha}; \quad y_3 = \frac{346{,}41}{2 + 10 \lg \operatorname{cosec} \alpha_3}.$$

Давая α значение через 10°, получим следующую разбивку шкал. По этим формулам вычислена номограмма III (рис. 46).

α, град.	$y_1 = y_2$, мм	y_3, мм
0	0,0	0,0
10	23,2	36,1
20	35,3	52,0
30	49,9	69,1
40	68,5	88,4
50	92,7	109,7
60	123,1	132,0
70	157,4	152,6
80	187,5	167,6
90	200,0	173,2

Построим равносторонний треугольник со сторонами, равными 200 мм, и проведем биссектрису. По основным шкалам наносим одинаковые шкалы y_1 и y_2, а по средней шкалу y_3. При пользовании номограммой надо помнить, что боковые шкалы соответствуют тем элементам, которые входят в произведение sin. Так, если $\alpha_1 = 50°,0$ и $\alpha_2 = 25°,3$, то, приложив линейку к указанным делениям боковых шкал, по средней шкале читаем $\alpha_3 = 20°,0$. В тех случаях, когда заданы α_1 и α_3, то прикладываем линейку к делениям α_1 и α_3, а по первой шкале читаем α_2.

Само собой разумеется, что номограмма III годна для решения уравнения

$$\cos\beta_3 = \cos\beta_1 \cos\beta_2,$$

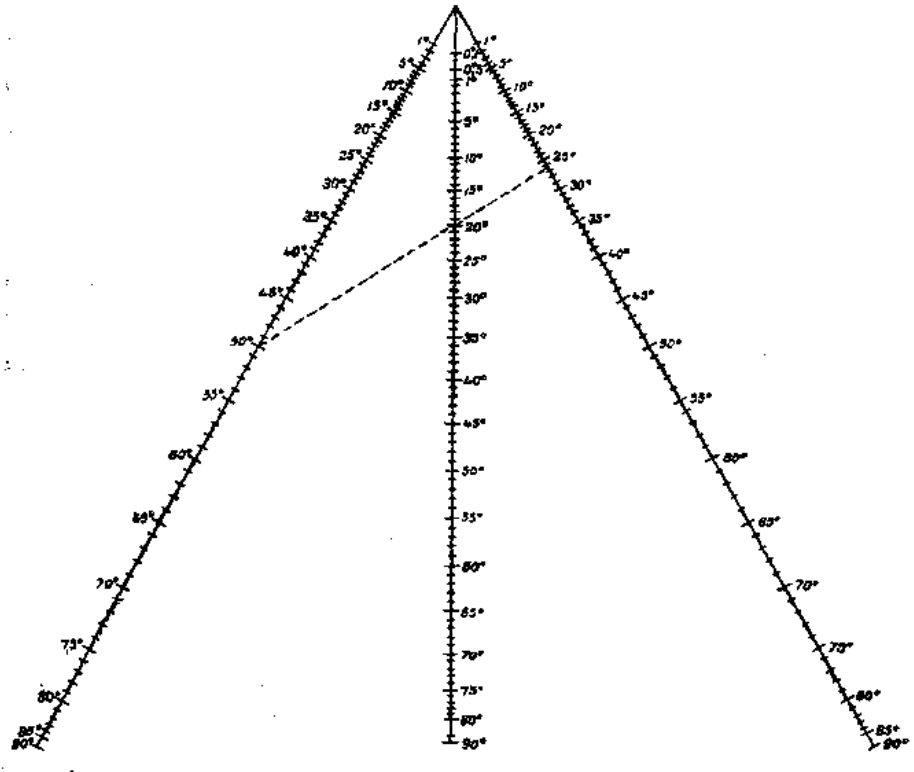

Рис. 46.

так как если написать это выражение в таком виде:

$$\sin(90° - \beta_3) = \sin(90° - \beta_1)\sin(90° - \beta_2),$$

то оно представит рассмотренное выше уравнение синусов т. е. для решения уравнений косинусов надо взять дополнение до 90° заданных углов β_i и поступать, как сказано выше.

§ 7. Пропорциональная номограмма с четырьмя переменными

Тип решаемого уравнения:

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = \frac{f_3(\alpha_3)}{f_4(\alpha_4)}.$$

Если четыре функции $f_1(\alpha_1)$, $f_2(\alpha_2)$, $f_3(\alpha_3)$ и $f_4(\alpha_4)$ пропорциональны между собой, т. е. удовлетворяют зависимости вида

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = \frac{f_3(\alpha_3)}{f_4(\alpha_4)}, \qquad (1)$$

то такой вид зависимости между четырьмя переменными α_1, α_2, α_3 и α_4 может быть представлен в виде номограммы разного вида.

А. Угловая номограмма

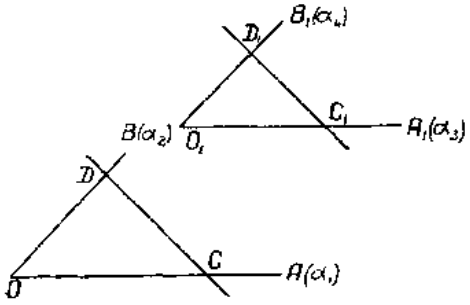

Рис. 47.

Простейший вид такой номограммы изображен на рис. 47. Номограмма состоит из двух углов с вершинами в точках O и O_1 с соответственно параллельными сторонами $O_1A_1 \| OA$ и $O_1B_1 \| OB$, являющимися носителями шкал этих переменных.

Для вывода уравнений геометрической связи наложим на номограмму индекс, состоящий из двух параллельных прямых $C_1D_1 \| CD$, и обозначим переменные отрезки:

$$OC = y_1 = \varphi_1(\alpha_1), \quad O_1C_1 = y_3 = \varphi_3(\alpha_3),$$
$$OD = y_2 = \varphi_2(\alpha_2), \quad O_1D_1 = y_4 = \varphi_4(\alpha_4).$$

Из подобия $\triangle OCD$ и $\triangle O_1C_1D_1$ следует, что

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_3}{y_4}, \qquad (2)$$

которое и выражает искомую геометрическую связь.

Уравнение (1), подлежащее номографированию, можно для большей приспособляемости номограммы тождественно преобразовать так:

$$\frac{A_1 f_1(\alpha_1)}{A_2 f_2(\alpha_2)} = \frac{A_3 f_3(\alpha_3)}{A_4 f_4(\alpha_4)} \qquad (3)$$

при условии

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_3}{A_4}. \qquad (4)$$

Из сопоставления уравнений (1) и (2) видно, что уравнениями шкал переменных α_1, α_2, α_3 и α_4 являются

$$y_1 = A_1 f_1(\alpha_1), \quad y_3 = A_3 f_3(\alpha_3),$$
$$y_2 = A_2 f_2(\alpha_2), \quad y_4 = A_4 f_4(\alpha_4).$$

Последние уравнения шкал показывают, что эти шкалы не являются вполне приспособляемыми, ибо они содержат только модули A_1, A_2, A_3, A_4; ориентирные же коэффициенты в них отсутствуют (см § 3, формулу 6).

Поэтому рассматриваемая номограмма в целом также *не является вполне приспособляемой.*

Из условия (4) следует, что только три модуля могут быть выбраны произвольно, четвертый же определяется из этого условия.

Определение значения α_4 по заданным α_1, α_2 и α_3 производится наложением прямой CD на пометки, соответствующие заданным значениям α_1 и α_2; затем через пометку C_1, определяемую значением α_3, проводят прямую $C_1D_1 \parallel CD$; пометка на шкале O_1D_1 против точки D_1 определяет искомое значение переменной α_4.

При построении пропорциональной номограммы положение вершин O и O_1, а также величина $\angle COD = \angle C_1O_1D_1$ могут быть выбираемы произвольно, из соображений удобного расположения номограммы на чертеже.

Модули шкал A_1, A_2, A_3, A_4 в уравнениях (5) выбираются так, чтобы шкалы в нужных пределах изменения независимых переменных α_1, α_2, α_3, α_4 уместились на чертеже.

Наконец, при помощи уравнений (5) на сторонах углов от вершин O и O_1 градуируются шкалы соответствующих переменных α_1, α_2, α_3, α_4.

Б. Прямоугольная (квадратная) номограмма

Пропорциональные номограммы с прямолинейными шкалами для решения уравнения (1) могут быть другого типа. Например, возьмем прямоугольник (рис. 48) $BOAO_1$ и проведем диагональ OO_1. Проведем еще две линии DC и EF, пересекающиеся в одной точке M на диагонали OO_1.

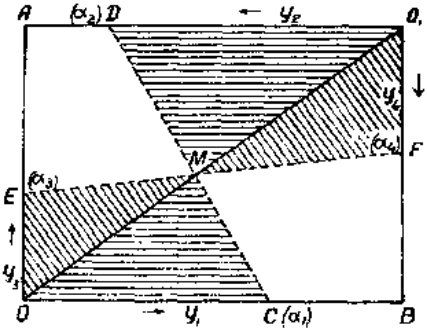

Рис. 48.

Из подобия треугольников OCM и O_1DM, а также и треугольников OEM и O_1FM можем написать

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{OM}{O_1M} \quad \text{и} \quad \frac{y_3}{y_4} = \frac{OM}{O_1M},$$

откуда следует, что

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_3}{y_4}. \qquad (5)$$

Если взять четыре числа A_1, A_2, A_3 и A_4 таких, чтобы было выполнено условие (4), то, перемножив уравнения (4) и (1), получим:

$$\frac{A_1 f_1(\alpha_1)}{A_2 f_2(\alpha_2)} = \frac{A_3 f_3(\alpha_3)}{A_4 f_4(\alpha_4)}.$$

Поэтому получим следующие уравнения шкал:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 f_1(\alpha_1), \quad y_2 = A_2 f_2(\alpha_2) \\ y_3 &= A_3 f_3(\alpha_3), \quad y_4 = A_4 f_4(\alpha_4) \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Таким образом, если расположить шкалы уравнения (1) по сторонам прямоугольника OAO_1B, как показано на рис. 48, то решать такое уравнение с помощью указанной номограммы следует так: прикладываем линейку к точкам C и D шкал y_1 и y_2 соответственно заданным значениям переменных α_1 и α_2 и отмечаем точку M на диагонали OO_1; прикладываем линейку к точке M и к точке E шкалы y_3 соответственно заданному значению переменной α_3, и в точке F по четвертой шкале читаем искомый ответ α_4. Понятно, что по трем любым заданным значениям переменных α_i четвертая может быть получена таким же приемом. Эта номограмма не очень удобна, так как принадлежит к типу неприспособляемых.

§ 8. Построение криволинейной шкалы

Понятие о криволинейной шкале и способ ее построения непосредственно получается из рассмотрения параметрических уравнений плоской кривой (рис. 49):

$$x = \varphi(\alpha); \quad y = \psi(\alpha). \tag{1}$$

Если x и y в уравнениях (1) обозначают текущие координаты кривой AB в прямоугольной системе координат XOY, то независимая переменная α в этих уравнениях называется *параметром*.

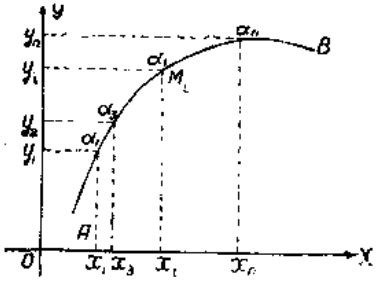

Рис. 49.

Если из системы (1) исключить параметр α, то получим уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{2}$$

той же кривой AB в виде неявной функции.

Каждому частному значению параметра $\alpha = \alpha_i$ из уравнений (1) соответствует определенная система значений текущих координат:

$$x_i = \varphi(\alpha_i), \quad y_i = \psi(\alpha_i),$$

определяющих координаты (x_i, y_i) точки M_i на кривой AB.

По координатам (x_i, y_i) точек M_i может быть вычерчена кривая AB — опора криволинейной шкалы.

Отмечая в точке M_i с координатами (x_i, y_i) соответствующее значение параметра α_i, мы получим градуировку криволинейной шкалы.

Системе уравнений (1) определенного вида соответствует вполне определенного вида уравнение (2) кривой AB, ибо результат исключения α из системы (1) является единственным; поэтому система (1) дает вполне определенную кривую AB — опору криволинейной шкалы.

Наоборот, от уравнения (2) опоры шкалы можно бесчисленными способами перейти к различного вида параметрическим ее уравнениям. Действительно, выбрав по произволу вид функции

$$x = \varphi(\alpha)$$

и подставив ее в уравнение (2), получим уравнение

$$\Phi[\varphi(\alpha),\ y]=0,$$

решив которое относительно y, найдем $y=\psi(\alpha)$.

Таким образом, каждому виду функции $x=\varphi(\alpha)$ соответствует из уравнения (2) кривой AB свой вид функции $y=\psi(\alpha)$.

Вид функций (1) определяет расположение пометок на криволинейной шкале. Из сказанного следует: одна и та же опора может быть градуирована бесчисленным множеством способов, что представляет большое удобство при построении номограмм.

Пример. Построить шкалу функции, заданную параметрическими уравнениями

$$x=1+\cos\alpha;\qquad y=\sin\alpha.$$

Так как

$$(x-1)^2=\cos^2\alpha;\quad y^2=\sin^2\alpha,$$

то уравнение (2) опоры шкалы имеет вид

$$(x-1)^2+y^2=1,$$

т. е. опора шкалы есть окружность.

Давая параметру α последовательные значения от 0° до 180°, например через 15°, получим криволинейную шкалу, изображенную на рис. 50.

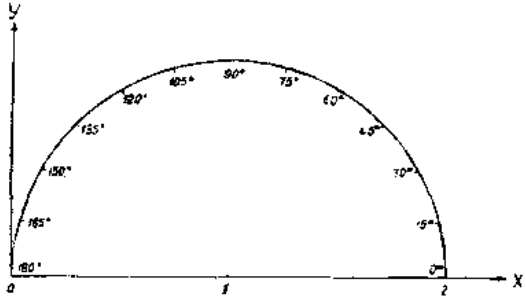

Рис. 50.

Пример. Дано уравнение опоры

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Построить криволинейную шкалу, приняв

$$x=\frac{2p^2}{p^2+1}.$$

Подставив в уравнение опоры, получим:

$$\frac{(p^2-1)^2}{(p^2+1)^2}+y^2=1,$$

откуда

$$y=\frac{2p}{p^2+1}.$$

Таким образом, параметрические уравнения той же окружности можно написать так:

$$x=\frac{2p^2}{p^2+1};\qquad y=\frac{2p}{p^2+1}.$$

Давая параметру p значение от 0 до $+\infty$, получим криволинейную шкалу, изображенную на рис. 51.

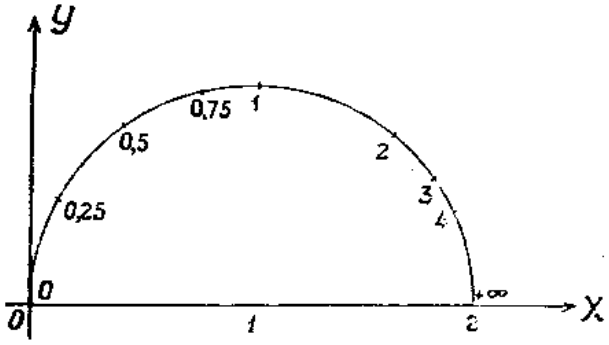

Рис. 51.

§ 9. Круговая номограмма

Тип решаемого уравнения

$$f_3(a_3) = f_1(a_1) f_2(a_2).$$

Пусть шкалы a_1 и a_2 расположены на окружности круга, а прямолинейная шкала a_3 расположена на диаметре OD этого круга (рис. 52). Наложим индекс BCA на эту номограмму и найдем, какой будет общий вид уравнения между тремя переменными a_1 a_2 и a_3, чтобы его можно было решать с помощью круговой номограммы. Соединим точки A и B с началом координат O и обозначим через γ и δ углы XOA и XOB, образуемые указанными прямыми с положительным направлением оси X-ов. Если соединить точки A и B с D, то на основании теоремы начальной геометрии $ADO = XOA = \gamma$ и $BDO = X'OB = \pi - \delta$.

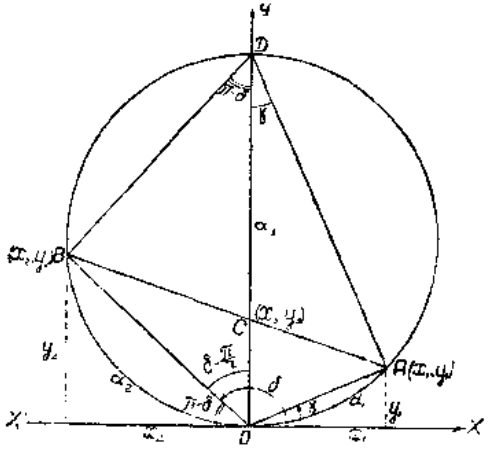

Рис. 52.

Из треугольников OCA и DCA имеем:

$$\frac{OC}{CA} = \frac{\sin CAO}{\sin COA} = \frac{\sin(\pi - \delta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)} = \frac{\sin\delta}{\cos\gamma};$$

$$\frac{CA}{CD} = \frac{\sin CDA}{\sin DAC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sin\gamma}{\cos\delta}.$$

Перемножив эти выражения, найдем

$$\frac{OC}{CD} = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\gamma. \tag{1}$$

Это и есть уравнение геометрической связи для круговой номограммы, так как это соотношение будет справедливо для любого положения индекса BCD.

Углы δ и γ вполне определяются пометками α_1 и α_2 шкал, и поэтому можно положить

$$\operatorname{tg}\gamma = f_1(\alpha_1); \qquad -\operatorname{tg}\delta = f_2(\alpha_2).$$

Очевидно, что и обратно, по заданным значениям функций $f_1(\alpha_1)$ и $f_2(\alpha_2)$, можно найти соответственные углы γ и δ, т. е. можно градуировать боковые шкалы α_1 и α_2. Понятно также, что отношение $OC:CD$ определяет соответственное деление третьей прямолинейной шкалы, а потому можно положить, что

$$\frac{OC}{CD} = f_3(\alpha_3),$$

а тогда вместо формулы (1) получим

$$f_3(\alpha_3) = f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2). \tag{2}$$

Это и будет общий вид всякого уравнения, которое можно представить в виде круговой номограммы указанного вида. Вместо того чтобы градуировать боковые шкалы графически по углам γ и δ, удобнее это делать по точкам, вычисляя их прямоугольные координаты, пользуясь тем обстоятельством, что обе шкалы лежат на окружности круга.

Примем точку O за начало прямоугольных координат и расположим оси, как указано на рис. 52.

Уравнение круга—опоры обеих шкал—будет

$$x^2 + y^2 - Dy = 0,$$

где D—диаметр круга.

Для координат x_1, y_1 какой-нибудь точки A будем иметь одновременно

$$x_1^2 + y_1^2 - Dy_1 = 0; \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{y_1}{x_1} = f_1(\alpha_1).$$

Решая их относительно x_1 и y_1, найдем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{Df_1(\alpha_1)}{1 + f_1^2(\alpha_1)} \\ y_1 &= \frac{Df_1^2(\alpha_1)}{1 + f_1^2(\alpha_1)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Подобным же образом для координат (x_2, y_2) точки B найдем, принимая во внимание знак x_2:

$$\left.\begin{aligned} -x_2 &= \frac{Df_2(\alpha_2)}{1 + f_2^2(\alpha_2)} \\ &= \frac{Df_2^2(\alpha_2)}{1 + f_2^2(\alpha_2)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для координат x_3, y_3 третьей точки C прямолинейной шкалы, имея в виду, что $OC=y_3$, а $DC=D-y_3$, получим

$$\frac{y_3}{D-y_3}=f_3(\alpha_3),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} y_3&=\frac{Df_3(\alpha_3)}{1+f_3(\alpha_3)}\\ x_3&=0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Полученные формулы (3), (4) и (5) вполне решают вопрос о расчете и построении круговой номограммы произведения двух функций:

$$f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2)=f_3(\alpha_3).$$

Выгода этой номограммы заключается в том, что она годится для изображения функций $f_1(\alpha_1)$, $f_2(\alpha_2)$ и $f_3(\alpha_3)$ даже в том случае, если одна из них или все, при некотором значении переменных α_1, α_2 и α_3, обращаются в ∞, так как в этом случае координаты: x равно 0, а y равно D.

Можно градуировать шкалы переменных α_1 и α_2 графически следующим образом.

Из рис. 53 видно, что если провести радиусы окружности O_1A и O_1B под углами θ и ψ соответственно заданным углам γ и δ, то точки шкал определятся в пересечении радиуса, идущего под углом θ или ψ с построенной окружностью радиуса $^1/_2D$. Задача сводится к определению углов θ и ψ по заданным значениям переменных α_1 и α_2.

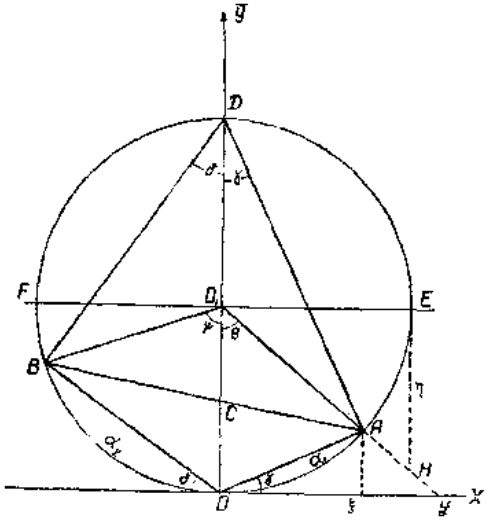

Рис. 53.

Как сказано выше,

$$\operatorname{tg}\gamma=f_1(\alpha_1),$$
$$\operatorname{tg}\delta=f_2(\alpha_2),$$

считая угол δ от отрицательного направления оси X. Так как углы θ и ψ, определяющие положения точек A и B в соответствующих заданным значениям переменных α_1 и α_2, равны соответственно 2γ и 2δ, то, пользуясь известной формулой тригонометрии для tg двойного угла, получим

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2f_1(\alpha_1)}{1-f_1^2(\alpha_1)}; \quad \operatorname{tg}\psi=\frac{2f_2(\alpha_2)}{1-f_2^2(\alpha_2)}. \qquad (6)$$

Собственно, строить углы θ и ψ транспортиром при точном построении номограммы, конечно, не следует, а лучше строить углы по tg, т. е. вычислять отрезки $\xi=OL$ при $\theta<45°$ и $\eta=FH$ при $\theta>45°$ по очевидным формулам

$$\xi=\frac{D}{2}\operatorname{tg}\theta \quad \text{или} \quad \eta=\frac{D}{2}\operatorname{ctg}\theta. \qquad (7)$$

Пример. Рассчитать и построить номограмму для решения уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \sin\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2. \tag{8}$$

Полагая в предыдущих формулах

$$f_1(\alpha_1) = \sin\alpha_1,$$
$$f_2(\alpha_2) = \operatorname{tg}\alpha_2,$$
$$f_3(\alpha_3) = \operatorname{tg}\alpha_3,$$

получим формулы для вычисления координат точек шкал:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{шкала } \alpha_1 & x_1 = \dfrac{D\sin\alpha_1}{1+\sin^2\alpha_1}; & y_1 = \dfrac{D\sin^2\alpha_1}{1+\sin^2\alpha_1} = x_1\sin\alpha_1 \\ \text{шкала } \alpha_2 & x_2 = \dfrac{D\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha_2}; & y_2 = \dfrac{D\operatorname{tg}^2\alpha_2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha_2} = -x_2\operatorname{tg}\alpha_2 \\ \text{шкала } \alpha_3 & x_3 = 0; & y_3 = \dfrac{D\operatorname{tg}\alpha_3}{1+\operatorname{tg}\alpha_3} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Легко убедиться, что хотя $\operatorname{tg}\alpha_2$ и $\operatorname{tg}\alpha_3$ при $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$, обращаются в бесконечность, координаты остаются конечными.

Исследуем, как располагаются шкалы на окружности круга.

При изменении α_1 от 0° до 90° координаты x_1 и y_1 изменяются от 0 до $^1/_2 D$, т. е. шкала α_1 располагается от точки O до E (рис. 54). Точка O соответствует пометке шкалы 0°, а точка E — пометке шкалы 90°.

Когда $\alpha_2 = 0$, то $x_2 = y_2 = 0$; когда $\alpha_2 = 45°$, то $x_2 = y_2 = {}^1/_2 D$, т. е. получается точка F; при дальнейшем увеличении x_2 от 45° до 90° x_2, оставаясь отрицательным, стремится к 0, а y_2 к D. Иными словами, шкала α_2 занимает левую половину окружности от 0 до D через F. Наконец, прямолинейная шкала α_3 имеет пометки 0 при $\alpha_3 = 0°$, а при $\alpha_3 = 90°$ $y_3 = D$, т. е. вся шкала располагается на диаметре OD круга, совпадающем с осью Y.

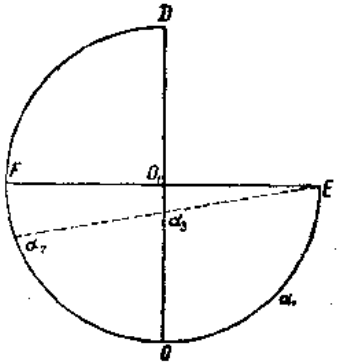

Рис. 54.

Общий вид номограммы IV показан на рис. 55. Если в уравнении (8) положить $\alpha_1 = 90°$, то получим, что $\alpha_2 = \alpha_3$. Поэтому, если точку E (рис. 54) принять за полюс, то шкала α_2 будет проективным изображением шкалы α_3 для полюса E.

Приведенная на рис. 55 круговая номограмма вычислена при $D = 100$ *мм* с помощью следующих формул:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{100}{\sin\alpha_1 + \operatorname{cosec}\alpha_1}; & y_1 = \dfrac{100}{1+\operatorname{cosec}^2\alpha_1} = x_1\sin\alpha_1 \\ x_2 = -50\sin 2\alpha_2; & y_2 = 100\sin\alpha_2 = x_2\operatorname{tg}\alpha \\ x_3 = 0; & y_3 = \dfrac{100}{1+\operatorname{ctg}\alpha_3} \end{array}\right\} \tag{10}$$

При вычислении этих шкал можно пользоваться следующими упрощениями: координаты x_2 шкалы α_2 симметричны относительно линии O_1F, т. е. вычислять x_2 надо только до $\alpha_2 = 45°$. Также коор-

динаты y_2 следует вычислять лишь до значений $\alpha_2 = 45°$, а после 45° они будут равны дополнению до 100 уже найденных; таким же образом ординаты y_3 после значений $\alpha_3 = 45°$ будут равны дополнению до 100 соответственных значений y_3.

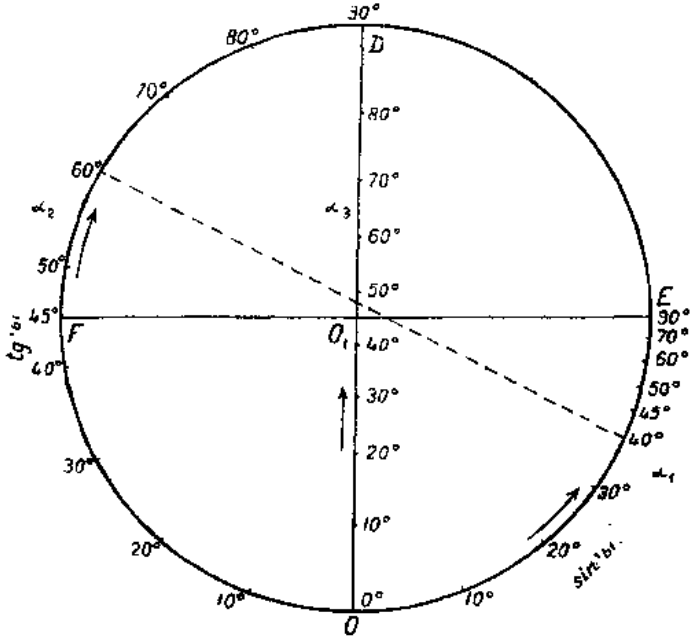

Рис. 55.

Полностью вычислить придется только одну шкалу α_1 для всех значений α_1 от 0° до 90°.

Приводимая ниже табличка служит иллюстрацией вычислений по формулам (10).

α	Шкала α_1		Шкала α_2		Шкала α_1
град.	x_1, мм	y_1, мм	x_2, мм	y_2, мм	y_3, мм
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10	16,8	3,0	17,1	3,0	15,0
20	30,6	10,5	32,2	11,7	26,7
30	40,0	20,0	43,3	25,0	36,7
40	45,5	29,3	49,7	41,3	45,6
50	48,3	37,0	49,7	58,7	54,4
60	49,5	42,8	43,3	75,0	63,4
70	49,9	46,9	32,2	88,3	73,3
80	50,0	49,8	17,1	97,0	85,0
90	50,0	50,0	0,0	101,0	100,0

Если применить для вычисления номограммы IV формулы (6), то получим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{2\sin\alpha_1}{1-\sin^2\alpha_1} = 2\operatorname{tg}\alpha_1\sec\alpha_1 \\ \text{и}\qquad \operatorname{tg}\psi &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha_2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha_2} = \operatorname{tg}2\alpha_2 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

из коих последняя показывает, что шкала α_2 равномерная и угол $\psi = 2\alpha_2$. Последнее свойство номограммы позволяет строить шкалу α_2 графически с помощью tg углов $2\alpha_2$.

Для пользования номограммой IV следует прежде всего соответственную основную формулу привести к виду (8), т. е., если надо, вместо заданных элементов взять дополнения до 90°. При пользовании номограммой следует помнить, что прямолинейная шкала соответствует отдельно лежащему числу $\operatorname{tg}\alpha_2$, а круговые шкалы соответствуют произведению двух других множителей, причем левая шкала отвечает $\operatorname{tg}\alpha_2$, а правая $\sin\alpha_1$.

Таким образом, если заданы элементы α_1 и α_2, то, приложив линейку к соответственным делениям боковых шкал, по средней шкале читаем искомый ответ α_3.

В том случае, когда заданы элементы α_3 и α_1, приложив линейку к указанным делениям средней и правой шкал, читаем искомый ответ α_2 по левой шкале.

Известно, что все шесть формул прямоугольных и прямосторонних сферических треугольников могут быть приведены к двум типам:

$$\left.\begin{aligned} \sin w &= \sin u \sin v \\ \operatorname{tg} w &= \sin u \operatorname{tg} v \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где w, u и v—или сами элементы, или их дополнения до 90°.

Поэтому номограммы III и IV можно рассматривать как номограммы для решения прямоугольных и прямосторонних сферических треугольников.

Пример. Из сферической астрономии известно, что часовой угол τ захода (восхода) определяется формулой

$$\cos\tau = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta,$$

которую легко привести к виду (8) таким образом:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin(\tau - 90^\circ)\operatorname{tg}(90^\circ - \delta),$$

и, применяя указанную выше теорию, можно построить круговую номограмму V (рис. 56) для определения угла τ, пользование которой указано на полях самой номограммы.

§ 10. Параболическая номограмма

Тип решаемого уравнения

$$f_3(\alpha_3) = f_1(\alpha_1)\, f_2(\alpha_2).$$

Если ни одна из функций f_1, f_2 и f_3 не обращается в бесконечность для заданного интервала изменений переменных α_1, α_2 и α_3, то

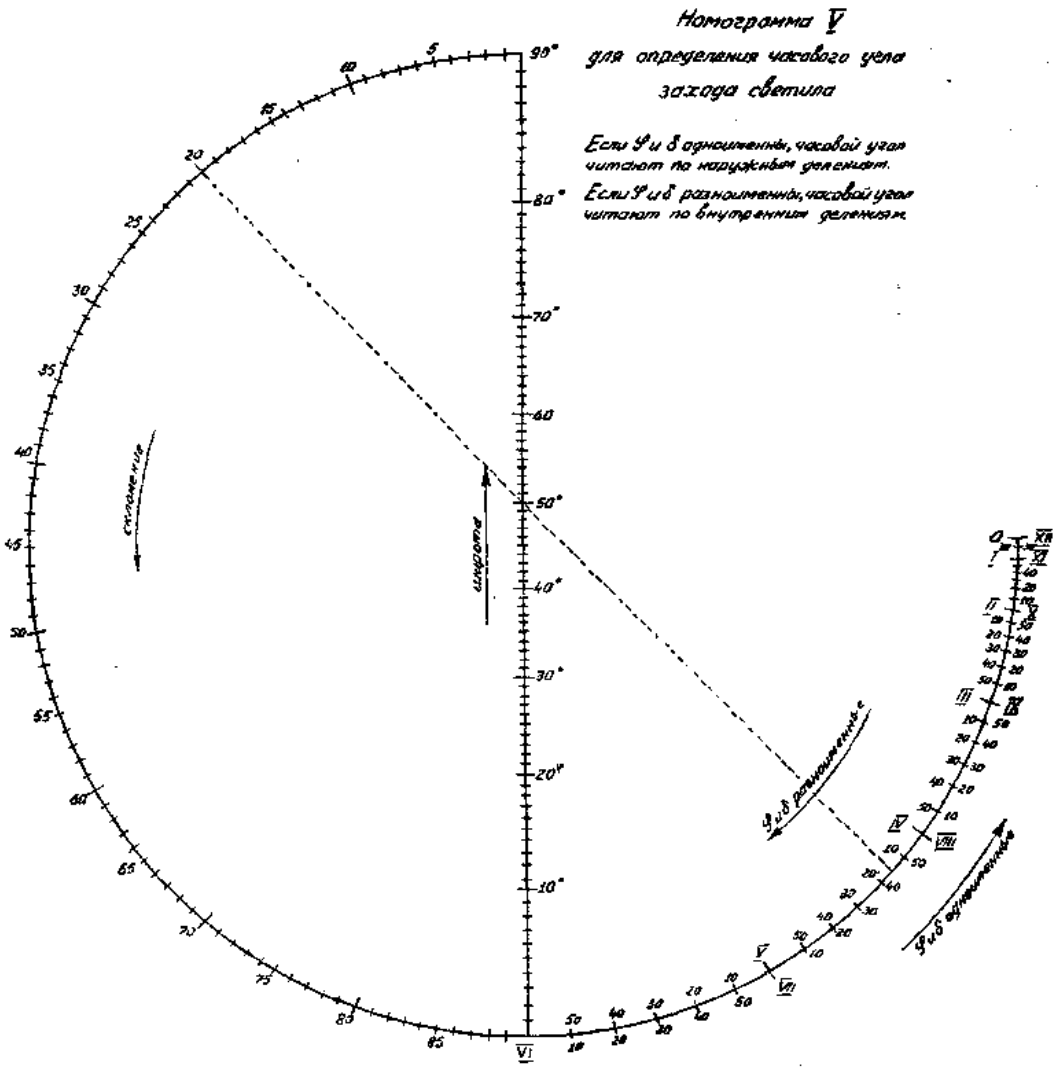
Номограмма V
для определения часового угла
захода светила
Если φ и δ одноименны, часовой угол
читают по наружным делениям.
Если φ и δ разноименны, часовой угол
читают по внутренним делениям.
склонение
широта
φ и δ разноименные
φ и δ одноименные

Рис. 56.

уравнение $f_3(\alpha_3) = f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2)$ может быть решаемо с помощью *параболической номограммы.*

Пусть круг $DFOE$ есть опора шкал круговой номограммы, описанной в предыдущем параграфе, и служит также основанием прямого кругового конуса с вершиной в точке I (рис. 57).

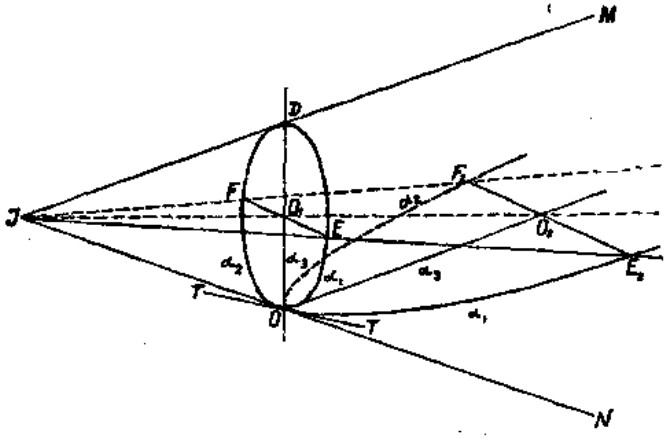

Рис. 57.

Вообразим прямую TT, касательную к кругу $DFOE$ в точке O и перпендикулярную плоскости (рис. 57). Повернем плоскость круга $DFOE$ вокруг касательной TT так, чтобы она стала параллельна образующей ID конуса. Тогда она пересечет поверхность конуса по параболе F_2OE_2, которую можно рассматривать как проективное преобразование круга относительно полюса I. Легко сообразить, что шкалы преобразованной номограммы будут конечной длины, так как радиус OO_1 круга обратится в конечную длину OO_2 в параболической номограмме. Понятно, что преобразованная таким образом номограмма сохранит свойство колинеарности, т. е. три точки, лежащие на одной прямой в круговой номограмме, будут располагаться также на одной прямой в преобразованной, для которой ветви параболы OE_2 и OF_2 будут служить опорами шкал α_1 и α_2, а ось параболы OO_2 будет служить опорой шкалы α_3.

Так как вершину I конуса можно взять в любой точке оси O_1O_2, то понятно, что круговую номограмму можно преобразовать в параболическую самой разнообразной формы, т. е. у этой параболы полупараметры могут быть разной величины.

Приведем формулы для расчета шкал параболической номограммы.

Уравнение параболы, отнесенное к вершине и главной оси, совпадающей с осью Y-ов, будет (рис. 58)

$$y = \frac{x^2}{2p}, \tag{1}$$

где $2p$ — параметр параболы, величина которого определится размерами чертежей номограммы. Если H есть высота, а L — наибольшая ширина, то для определения параметра послужит формула

$$2p = \frac{L^2}{4H}. \tag{2}$$

Для вычисления координат точек шкалы α_1 примем, что

$$x_1 = l_1 f_1(\alpha_1). \tag{3}$$

Тогда соответствующее значение y_1 будет

$$y_1 = \frac{l_1^2 f_1^2(\alpha_1)}{2p}. \tag{4}$$

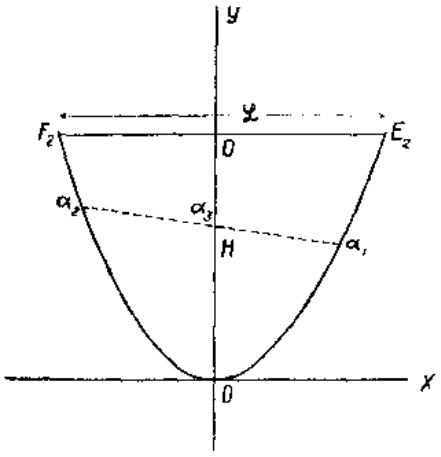

Рис. 58.

Таким же образом для шкалы α_2 найдем

$$x_2 = l_2 f_2(\alpha_2) \text{ и } y_2 = \frac{l_2^2 f_2^2(\alpha_2)}{2p}, \tag{5}$$

и, наконец, прямолинейная шкала α_3 определяется уравнением

$$y_3 = l_3 f_3(\alpha_3). \tag{6}$$

Модули l_1, l_2 и l_3 определятся по размерам номограммы и пределами изменения переменных.

Между модулями l_1, l_2 и l_3 существует зависимость

$$l_3 = \frac{l_1 l_2}{2p}, \tag{6}*$$

показывающая, что при заданной величине параметра параболы $2p$ два модуля можно задать произвольно.

Пример. Рассчитать и построить номограмму для определения азимута истинного восхода и захода светила, приняв для размеров номограммы $H = 200$ *мм* и $L = 100$ *мм*. Пределы широты и склонения от 0° до 90° и азимута от 0° до 90°.

Азимут a_0 истинного восхода определяется формулой

$$\cos a_0 = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \quad \text{или} \quad \sin \delta = \cos a_0 \cos \varphi.$$

Здесь $f_1(\alpha_1) = \cos a_0$, $f_2(\alpha_2) = \cos \varphi$ и $f_3(\alpha_3) = \sin \delta$. Шкалы α_1 и α_2, как видно, будут одинаковы.

Определяем модули $l_1 = l_2$ и l_3.

Если $a_0 = 0°$, то

$$x_1 = l_1 = \frac{L}{2} = l_2.$$

Если $a_0 = 90°$, то $x_1 = 0$.

Поэтому

$$x_1 = \frac{L}{2} \cos a_0; \qquad y_1 = \frac{l_1^2 \cos^2 a_0}{2p} = \frac{L^2 \cos^2 a_0}{8p} = H \cos^2 a_0,$$

или

$$x_1 = 50 \cos a_0; \quad y_1 = 100 \cos^2 a_0; \tag{7}$$
$$x_2 = 50 \cos \varphi; \quad y_2 = 100 \cos^2 \varphi.$$

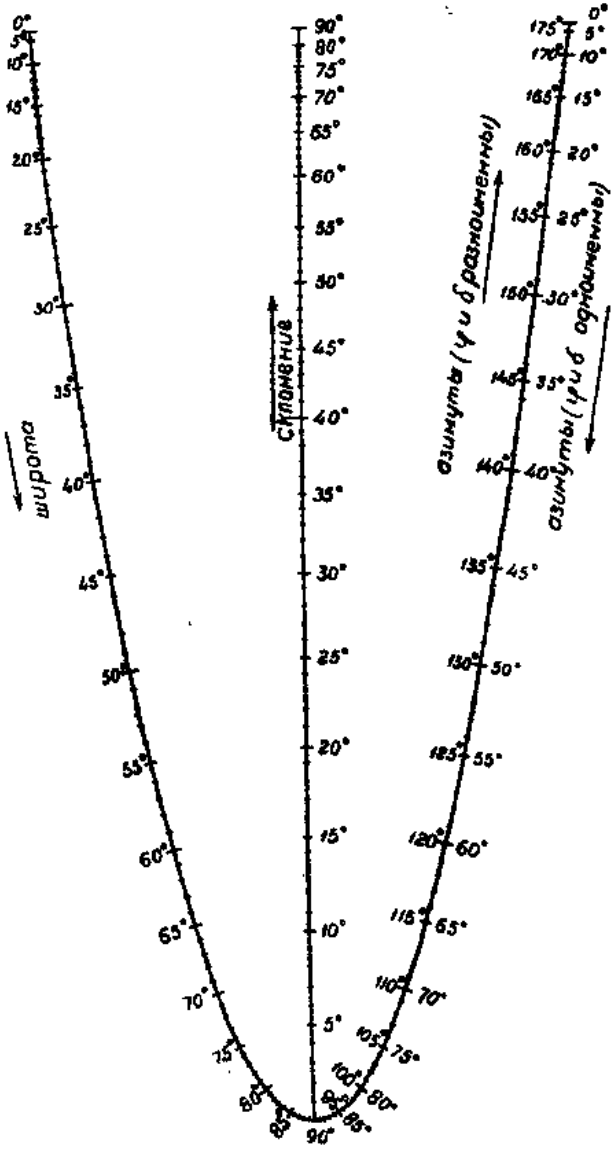
широта
склонение
азимуты (ψ и δ разноименны)
азимуты (ψ и δ одноименны)

Рис. 59.

Для модуля l_3 имеем:

$$\text{при } \delta = 0 \quad y_3 = 0,$$
$$\text{при } \delta = 90^\circ \; y_3 = l_3 = H.$$

Поэтому

$$y_3 = H \sin \delta = 200 \sin \delta. \tag{8}$$

По формулам (7) и (8) рассчитана номограмма VI (рис. 59), пользование которой таково: соединяем пометку широты $\varphi = 50^\circ$ с пометкой склонения $\delta = 20^\circ$ и по правой шкале читаем при $\delta > 0$ $a_0 = 58^\circ$, а при $\delta < 0$ $a_0 = 122^\circ$. Точное значение азимута 57°,9.

§ 11. Сдвоенная параболическая номограмма

Тип решаемого уравнения

$$f_1(a_1) f_4(a_4) = f_2(a_2) f_3(a_3).$$

Уравнение (1) § 7 можно написать в виде

$$f_1(a_1) f_4(a_4) = f_2(a_2) f_3(a_3). \tag{1}$$

Указанное уравнение равносильно двум таким:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= f_1(a_1)\; f_4(a_4) \\ \lambda &= f_2(a_2)\; f_3(a_3) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

каждое из которых принадлежит к типу произведения двух функций и если ни одна из них не обращается в ∞, то каждое уравнение может быть решено с помощью параболической номограммы, как это сказано в § 10.

Если обе параболы, служащие для решения каждой половины уравнения (1), соединить так, чтобы вершины и оси их совпали, то получим сдвоенную параболическую номограмму, схема которой приведена на рис. 60.

На ветвях первой параболы AOB строим шкалы функции $f_2(a_2)$ и $f_3(a_3)$, а на второй параболе наносим шкалы функции $f_1(a_1)$ и $f_4(a_4)$. Средняя шкала функции λ, располагающаяся на общей оси этих парабол, как видно, роли в решении не играет и остается неградуированной, т. е. немой шкалой.

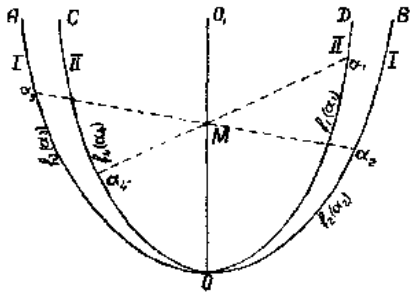

Рис. 60.

Пользование этой номограммой таково: соединяем прямой линией пометки a_2 и a_3 боковых шкал первой параболы и на оси отмечаем точку M. Соединяем ее с пометкой шкалы a_1 на второй параболе и читаем ответ a_4 на той же второй параболе в точке, приходящейся на прямой линии $a_1 a_4$.

Если функции f_1 и f_2, а также f_3 и f_4 одинаковы, то обе параболы можно совместить в одну, но надо нанести на каждой ветви двойные пометки — с одной стороны для переменных a_3 и a_4, а с другой для переменных a_1 и a_2.

Подобная совмещенная параболическая номограмма будет годна для решения известного уравнения синусов сферической тригонометрии, ибо она имеет такой вид;

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

По этому уравнению, как известно, определяют азимут светила по склонению, высоте и часовому углу:

$$\frac{\sin A}{\sin t} = \frac{\cos \delta}{\cos h} = \frac{\sin (90° - \delta)}{\sin (90° - h)}.$$

Для указанной цели к МТ-43 приложена номограмма III именно указанного вида, у которой правая шкала имеет одинаковые пометки для высот h и склонения δ, а другая шкала имеет одинаковые деления с надписями в градусной и во временной мерах.

Пользуясь этой номограммой, азимут можно найти без всяких вычислений, с точностью, отвечающей потребности этой задачи. Например:

$$t = 2^{h}48^{m} \text{ (Ost)}, \quad \delta = +6°,6, \quad h = 41°,7.$$

Прикладываем линейку к делениям $2^{h}48^{m}$ на левой шкале и 6°,6 на правой и отмечаем точку на оси параболы; соединяем эту точку с делением 41°,7 по правой шкале и по левой читаем азимут 63°,0; точное значение при этих данных будет 62°,9. Если часовые углы выражать в градусных делениях, то и на левой шкале будет одна система градусных делений.

§ 12. Номограмма из выравненных точек с двумя параллельными шкалами и одной криволинейной

Тип решаемого уравнения:

$$f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2) + f_2(\alpha_2) + \varphi_3(\alpha_3) \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

Рассматриваемая номограмма имеет вид, изображенный схематически на рис. 61.

Пусть прямолинейная шкала переменной α_1 совпадает с осью OY прямоугольной системы координат; вторая прямолинейная шкала O_1D переменной α_2 параллельна оси OY, кривая же AB является опорой криволинейной шкалы для переменной α_3.

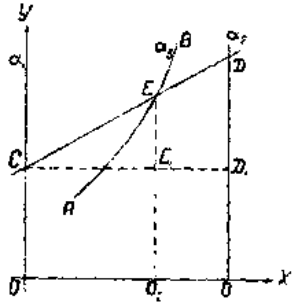

Рис. 61.

Выведем уравнение геометрической связи, а вместе с тем установим тот частный вид функциональной зависимости (1) § 1 между переменными α_1, α_2, α_3, который может быть представлен в виде номограммы, приведенной на рис. 61, дающей возможность наложением индекса CD по заданным значениям переменных α_1 и α_2 определить значение α_3 по пометке в точке E на кривой AB.

Обозначив

$$OC = y_1, \quad O_1D = y_2 \quad \text{и} \quad O_2E = y_3, \quad OO_1 = l, \quad OO_2 = x_3$$

и проведя $CD_1 \| OX$ из подобия $\triangle CEE_1$ и $\triangle CDD_1$, получим

$$\frac{DD_1}{CD_1} = \frac{EE_1}{CE_1} \quad \text{или} \quad \frac{y_2 - y_1}{l} = \frac{y_3 - y_1}{x_3}.$$

Эту пропорцию можно переписать в виде равносильного уравнения

$$y_1\left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{l}\right) + \frac{1}{l}\, y_2 - \frac{y_3}{x_3} = 0. \tag{1}$$

Последнее уравнение есть искомое уравнение геометрической связи.

По правилу построения прямолинейных шкал y_1 и y_2 являются некоторыми функциями переменных α_1 и α_2 соответственно; по правилу же построения криволинейной шкалы AB на основании уравнений (1) x_3 и y_3 являются некоторыми функциями одной и той же переменной α_3.

Поэтому уравнение (1), если его выразить через переменные α_1, α_2, α_3, имеет следующий вид:

$$f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) + \varphi_3(\alpha_3)\, \psi_3(\alpha_3) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) устанавливает вид функциональной зависимости между α_1, α_2, α_3, которое может быть представлено в виде номограммы рассматриваемого типа; оно является частным случаем уравнения (1) § 1.

Уравнение (2) иногда представляют в таком виде:

$$f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2)\, \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0, \tag{3}$$

которое только по виду отличается от уравнения (2).

В самом деле, если разделить уравнение (3) на $\varphi_3(\alpha_3)$, то получим

$$f_1(\alpha_1)\, \frac{f_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3)} + f_2(\alpha_2) + \frac{\psi_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3)} = 0.$$

Если обозначить еще

$$\frac{f_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3)} = F_3(\alpha_3) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varphi_3(\alpha_3)} = \Phi_3(\alpha_3),$$

то получим

$$f_1(\alpha_1) F_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) + \Phi_3(\alpha_3)\, \psi_3(\alpha_3) = 0,$$

т. е. функциональную зависимость вида (2).

Тот или иной вид уравнений не имеет практического значения.

Чтобы получить в дальнейшем уравнения вполне приспособляемых прямолинейных шкал для α_1 и α_2, преобразуем уравнение (2) тождественно, умножив его на

$$A_2 = A_1 A_3, \tag{4}$$

где A_1 и A_3, а следовательно, и A_2 — произвольные числа. После перемножения получим:

$$A_1 f_1 A_3 f_3 + A_2 f_2 + A_2 \varphi_3 \psi_3 = 0.$$

Прибавим к левой части последнего уравнения и вычтем из нее одну и ту же величину

$$B_1 A_3 f_3 + B_2,$$

где B_1 и B_2 также произвольные числа.

После соответствующей группировки членов получим уравнение вида

$$(A_1 f_1 A_3 f_3 + B_1 A_3 f_3) + (A_2 f_2 + B_2) + (A_3 \varphi_3 \psi_3 - B_1 A_3 f_3 - B_3) = 0$$

или

$$(A_1 f_1 + B_1) A_3 f_3 + (A_2 f_2 + B_2) + (A_3 \varphi_3 \psi_3 - B_1 A_3 f_3 - B_3) = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением геометрической связи (1), если положить:

$$y_1 = A_1 f_1 (\alpha_1) + B_1; \tag{5}$$

$$y_2 = A_2 l f_2 (\alpha_2) + B_2 l; \tag{6}$$

$$\frac{1}{x_3} - \frac{1}{l} = A_3 f_3; \quad \frac{-y_3}{x_3} = A_2 \varphi_3 \psi_3 - B_1 A_3 f_3 - B_2,$$

откуда

$$x_3 = \frac{l}{l A_3 f_3 (\alpha_3) + 1}; \tag{7}$$

$$y_3 = -l \frac{A_2 \varphi_3 \psi_3 - B_1 A_3 f_3 - B_2}{l A_3 f_3 (\alpha_3) + 1}. \tag{8}$$

Уравнения (5) и (6) являются уравнениями вполне приспособляемых прямолинейных шкал переменных α_1 и α_2.

Система уравнений (7) и (8) имеет вид системы (1) § 8 криволинейной шкалы переменной α_3; в них эта переменная является параметром.

Расчет и построение номограммы производится в следующем порядке:

1) по заданным пределам изменения переменных α_1 и α_2 определяют модули A_1 и A_2 и ориентирные коэффициенты B_1 и B_2 по правилам § 3;

2) в зависимости от размеров номограммы выбирают l;

3) по формуле (4) вычисляют A_3;

4) найденные значения A_1, A_2, A_3, B_1 и B_2 подставляют в уравнения шкал (5) — (8);

5) прямолинейные шкалы для переменных α_1 и α_2 градуируют по их уравнениям (5) и (6) по правилам § 3;

6) криволинейную шкалу для переменной α_3 строят и градуируют по правилам § 7 на основании уравнений (7) и (8) этой шкалы.

§ 13. Номограммы из выравненных точек с тремя криволинейными шкалами

Номограммы, рассмотренные в § 4, 5 и 8, являются частным видом номограммы из выравненных точек с тремя криволинейными шкалами, схема которой была изображена на рис. 31.

Чтобы иметь возможность рассчитать и построить номограмму с тремя криволинейными шкалами, надо, подобно сделанному при рассмотрении номограммы предыдущих видов, составить в первую очередь уравнение геометрической связи и установить вид функциональной зависимости между тремя переменными α_3, α_2, α_3, которая может быть изображена такой номограммой.

Для решения этих вопросов воспользуемся методами аналитической геометрии, для чего криволинейные шкалы A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 отнесем к прямолинейной системе координат XOY (рис. 31). Пусть уравнение прямой CD (индекса) относительно осей XOY есть

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{1}$$

где x, y — текущие координаты прямой, u и v — коэффициенты в уравнении этой прямой, определяющие ее положение в плоскости XOY.

Обозначим через (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) координаты точек M_1, M_2, M_3 пересечения индекса CD с опорами криволинейных шкал и пусть α_1, α_2, α_3 — некоторая система пометок на этих шкалах в точках M_1, M_2, M_3.

Так как эти точки лежат на прямой CD, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению, т. е. должны иметь место тождества

$$\left.\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + 1 &= 0 \\ ux_2 + vy_2 + 1 &= 0 \\ ux_3 + vy_3 + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Совместное существование трех последних тождеств, как это следует из приложения теории определителей к решению и исследованию систем линейных уравнений, возможно при соблюдении условия

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Уравнение (3) является искомым уравнением геометрической связи, так как ему должны удовлетворять координаты точек M_1, M_2, M_3 пересечения индекса CD с тремя криволинейными шкалами номограммы.

Для установления вида функциональной зависимости (1) § 1 рассматриваемой номограммы заметим, что по правилу построения криволинейной шкалы, изложенному в § 7, координаты x_1, y_1 точек на шкале A_1B_1 будут на основании уравнений (1) § 8 некоторыми функциями параметра α_1, координаты x_2, y_2 — функциями параметра α_2, наконец, координаты x_3, y_3 точек на шкале A_3B_3 — функциями параметра α_3.

Поэтому уравнение геометрической связи (3) приводит к следующей функциональной зависимости, которая может быть представлена номограммой из выравненных точек с тремя криволинейными шкалами:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_1), & 1 \\ \varphi_2(\alpha_2), & \psi_2(\alpha_2), & 1 \\ \varphi_3(\alpha_3), & \psi_3(\alpha_3), & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\alpha_1)\psi_2(\alpha_2) - \varphi_2(\alpha_2)\psi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_2)\psi_1(\alpha_1) - \\ &- \varphi_1(\alpha_1)\psi_3(\alpha_3) + \varphi_3(\alpha_3)\psi_3(\alpha_3) - \varphi_3(\alpha_3)\psi_2(\alpha_2) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Для решения вопроса о приспособляемости номограммы из трех криволинейных шкал и вывода уравнений приспособляемых шкал преобразуем соответствующим способом тождественно уравнение (4), для чего умножим обе его части на определитель

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}$$

в котором элементы A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ — произвольные постоянные, подчиненные единственному ограничению, чтобы этот определитель не был равен нулю

Тогда уравнение (4) перепишется так:

$$\begin{vmatrix} A_1, A_2, A_3 \\ B_1, B_2, B_3 \\ C_1, C_2, C_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1), \psi_1(\alpha_1), 1 \\ \varphi_2(\alpha_2), \psi_2(\alpha_2), 1 \\ \varphi_3(\alpha_3), \psi_3(\alpha_3), 1 \end{vmatrix} = 0$$

или, пользуясь формулой для умножения определителей:

$$\begin{vmatrix} A_1\varphi_1(\alpha_1)+B_1\psi_1(\alpha_1)+C_1; & A_2\varphi_1(\alpha_1)+B_2\psi_1(\alpha_1)+C_2; & A_3\varphi_1(\alpha_1)+B_3\psi_1(\alpha_1)+C_3 \\ A_1\varphi_2(\alpha_2)+B_1\psi_2(\alpha_2)+C_1; & A_2\varphi_2(\alpha_2)+B_2\psi_2(\alpha_2)+C_2; & A_3\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3 \\ A_1\varphi_3(\alpha_3)+B_1\psi_3(\alpha_3)+C_1; & A_2\varphi_3(\alpha_3)+B_2\psi_3(\alpha_3)+C_2; & A_3\varphi_3(\alpha_3)+B_3\psi_3(\alpha_3)+C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Вынеся за знак определителя множителями элементы третьего столбца и сократив последнее уравнение на произведение этих трех множителей, получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{A_1\varphi_1(\alpha_1)+B_1\psi_1(\alpha_1)+C_1}{A_3\varphi_1(\alpha_1)+B_3\psi_1(\alpha_1)+C_3}; & \frac{A_2\varphi_1(\alpha_1)+B_2\psi_1(\alpha_1)+C_2}{A_3\varphi_1(\alpha_1)+B_2\psi_1(\alpha_1)+C_3}; & 1 \\ \frac{A_1\varphi_2(\alpha_2)+B_1\psi_2(\alpha_2)+C_1}{A_3\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3}; & \frac{A_2\varphi_2(\alpha_2)+B_2\psi_2(\alpha_2)+C_2}{A_3\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3}; & 1 \\ \frac{A_1\varphi_3(\alpha_3)+B_1\psi_3(\alpha_3)+C_1}{A_3\varphi_3(\alpha_3)+B_3\psi_3(\alpha_3)+C_3}; & \frac{A_2\varphi_3(\alpha_3)+B_2\psi_3(\alpha_3)+C_2}{A_3\varphi_3(\alpha_3)+B_3\psi_3(\alpha_3)+C_3}; & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Последнее уравнение равносильно уравнению (4) и получилось путем его тождественных преобразований.

Поэтому для функциональной зависимости вида (4) за параметрические уравнения трех криволинейных шкал могут быть приняты следующие системы уравнений, как это следует из сравнения определителей в последнем уравнении и в уравнении (3):

уравнения шкалы A_1B_1:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_1\varphi_1(\alpha_1)+B_1\psi_1(\alpha_1)+C_1}{\varphi_1(\alpha_1)+B_3\psi_1(\alpha_1)+C_3} \\ y_1 &= \frac{A_2\varphi_1(\alpha_1)+B_2\psi_1(\alpha_1)+C_2}{\varphi_1(\alpha_1)+B_3\psi_1(\alpha_1)+C_3} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

уравнения шкалы A_2B_2:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{A_1\varphi_2(\alpha_2)+B_1\psi_2(\alpha_2)+C_1}{\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3} \\ y_2 &= \frac{A_2\varphi_2(\alpha_2)+B_2\psi_2(\alpha_2)+C_2}{\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

уравнения шкалы A_3B_3:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{A_1\varphi_3(\alpha_3)+B_1\psi_3(\alpha_3)+C_1}{\varphi_3(\alpha_3)+B_3\psi_3(\alpha_3)+C_3} \\ y_3 &= \frac{A_2\varphi_3(\alpha_3)+B_2\psi_3(\alpha_3)+C_2}{\varphi_3(\alpha_3)+B_3\psi_3(\alpha_3)+C_3} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

В уравнениях (6) — (8) принято $A_3 = 1$, что можно сделать, не нарушая общности этих уравнений, так как коэффициент A_3 можно привести к единице, разделив числители и знаменатели дробей в правых частях на A_3.

Уравнения (6) — (8) содержат, таким образом, восемь произвольных постоянных: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, B_3 и C_3, играющих роль ориентирных коэффициентов и модулей, которые определяются из пределов (a_1, b_1), (a_2, b_2) изменения независимых переменных α_1, α_2 в подлежащем номографированию уравнении (4).

Если координатам (ξ_1, η_1) начальной точки шкалы для α_1 должно соответствовать значение $\alpha_1 = a_1$, а координатам (x_1, y_1) конечной точки этой шкалы соответствует пометка $\alpha_1 = b_1$, координаты же начальной и конечной точек шкалы переменной α_2, соответствующие пометкам $\alpha_2 = a_2$ и $\alpha_2 = b_2$, суть (ξ_2, η_2) и (x_2, y_2), то для определения восьми произвольных постоянных A_i, B_i, C_i в уравнениях (6) — (8) имеем следующие восемь уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{A_1\varphi_1(a_1) + B_1\psi_1(a_1) + C_1}{\varphi_1(a_1) + B_3\psi_1(a_1) + C_3} \\
\eta_1 &= \frac{A_2\varphi_1(a_1) + B_2\psi_1(a_1) + C_2}{\varphi_1(a_1) + B_3\psi_1(a_1) + C_3} \\
x_1 &= \frac{A_1\varphi_1(b_1) + B_1\psi_1(b_1) + C_1}{\varphi_1(b_1) + B_3\psi_1(b_1) + C_3} \\
y_1 &= \frac{A_2\varphi_1(b_1) + B_2\psi_1(b_1) + C_2}{\varphi_1(b_1) + B_3\psi_1(b_1) + C_3}
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{A_1\varphi_2(a_2) + B_1\psi_2(a_2) + C_1}{\varphi_2(a_2) + B_3\psi_2(a_2) + C_3} \\
\eta_2 &= \frac{A_2\varphi_2(a_2) + B_2\psi_2(a_2) + C_2}{\varphi_2(a_2) + B_3\psi_2(a_2) + C_3} \\
x_2 &= \frac{A_1\varphi_2(b_2) + B_1\psi_2(b_2) + C_1}{\varphi_2(b_2) + B_3\psi_2(b_2) + C_3} \\
y_2 &= \frac{A_2\varphi_2(b_2) + B_2\psi_2(b_2) + C_2}{\varphi_2(b_2) + B_3\psi_2(b_2) + C_3}
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Таким образом, расчет и построение номограммы из выравненных точек с тремя криволинейными шкалами для функциональной зависимости вида (4) производится в следующем порядке:

1) по заданным пределам (a_1, b_1), изменениям переменной α_1 и координатам крайних точек (ξ_1, η_1), (x_1, y_1) ее шкалы и по пределам (a_2, b_2) для α_2 и координатам (ξ_2, η_2), (x_2, y_2) крайних точек шкалы для α_2 из уравнений (9) и (10) определяют коэффициенты A_i, B_i, C_i;

2) найденные значения A_i, B_i, C_i подставляют в уравнения (6)—(8), после чего становятся известными параметрические уравнения этих шкал;

3) построение и градуировка шкал переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ производятся на основании параметрических уравнений этих шкал по правилам § 7.

Примечание. Уравнения (9) и (10) в связи с уравнениями (6) — (8) показывают, что номограмма из выравненных точек с тремя криволинейными шкалами является *вполне приспособляемой*.

§ 14. Номограммы с немыми шкалами (графическое исключение переменных)

В § 2, п. 3 было дано понятие о номограммах с немыми шкалами, которые являются простейшим средством увеличения числа переменных α_i в уравнении, подлежащем номографированию.

Рассмотрим несколько подробнее некоторые частные виды номограмм с немыми шкалами в связи с методом их расчета и построения.

А. Номограмма с пятью параллельными шкалами, из которых одна немая

Тип решаемого уравнения

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) = f_4(\alpha_4).$$

При помощи номограммы этого вида можно изобразить графически функциональную зависимость вида

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) = f_4(\alpha_4). \quad (1)$$

По общему методу введения немых шкал, о котором было сказано в разделе 3, § 2, уравнение (1) можно заменить равносильной системой

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) = \varphi(\alpha); \quad (2)$$

$$\varphi(\alpha) + f_3(\alpha_3) = f_4(\alpha_4). \quad (3)$$

Сравнивая уравнение (2) с уравнением (2) § 4, заключаем, что его можно представить при помощи номограммы с тремя параллельными шкалами для функций $f_1(\alpha_1)$, $f_2(\alpha_2)$ и $\varphi(\alpha)$.

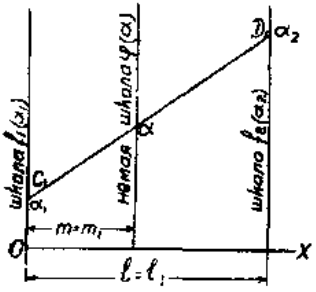

Рис. 62.

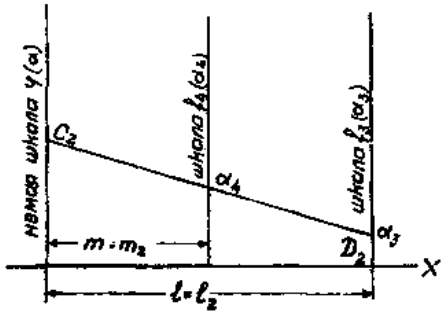

Рис. 63.

Эту номограмму рассчитывают и строят по правилам и формулам § 4, и она будет иметь вид, изображенный на рис. 62.

Принимая α_1 и α_2 за независимые переменные, вычисляем $m = m_1$ по формуле (5) § 4 при $l = l_1$, а уравнение шкалы для $\varphi(\alpha)$ составляем по формуле (6) того же параграфа, заменив в ней $f_3(\alpha_3)$ через $\varphi(\alpha)$.

Таким образом, в обозначениях § 4 модуль A и ориентирный коэффициент B шкалы $\varphi(\alpha)$ должны вычисляться по формулам

$$A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}; \quad (4)$$

$$B = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{A_1 + A_2}. \quad (5)$$

Уравнение (3) также имеет вид уравнения (2) § 4 и может быть представлено при помощи номограммы, приведенной на рис. 63, рассчитываемой также по формулам § 4.

Принимая функции $\varphi(\alpha)$ и $f_3(\alpha_3)$ за функции независимых переменных, по формуле (5) § 4 получим:

$$m_2 = \frac{l_2}{1+\frac{A_3}{A}}, \tag{6}$$

где A определяется формулой (4),

A_3 — модуль шкалы $f_3(\alpha_3)$.

По формуле (6) § 4 получим следующее уравнение шкалы функции $f_4(\alpha_4)$:

$$y_4 = \frac{AA_3}{A+A_3} f_4(\alpha_4) + \frac{AB_3 + A_3 B}{A+A_3}, \tag{7}$$

где B_3 — ориентирный коэффициент шкалы $f_3(\alpha_3)$.

Соединив обе номограммы уравнений (2) и (3), изображенные на рис. 62 и 63, в одну номограмму и сделав шкалу $\varphi(\alpha)$ общей, получим номограмму из пяти параллельных шкал с немой шкалой $\varphi(\alpha)$ для изображения функциональной зависимости (1), представленную на рис. 64.

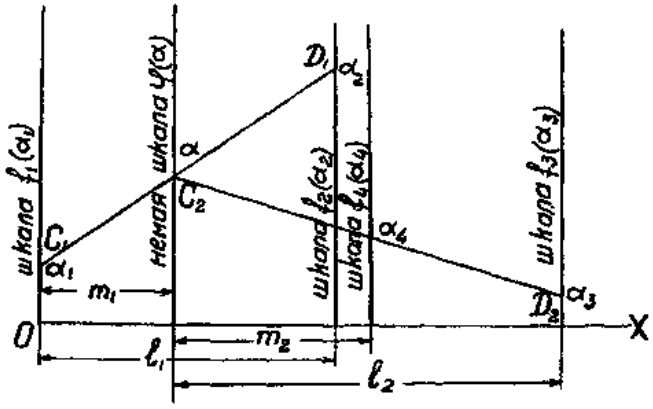

Рис. 64.

Так как функция $\varphi(\alpha)$ непосредственно в уравнение (1) не входит, то шкалу ее нет необходимости градуировать, однако при расчете и построении всей номограммы *вычисление модуля A и ориентирного коэффициента B шкалы* $\varphi(\alpha)$ *является необходимым*, ибо величины A и B входят в формулы (6) и (7).

Расчет и построение номограммы производится в следующем порядке:

1) по общим правилам построения приспособляемых прямолинейных шкал вычисляют A_1, A_2, B_1 и B_2 по формулам (9);
2) по формуле (5) § 4 при $l = l_1$ вычисляют m_1;
3) по формулам (4) и (5) вычисляют A и B;
4) по формулам (7) § 3 вычисляют A_3 и B_3;
5) по формуле (6) вычисляют m_2;
6) уравнение шкалы $f_4(\alpha_4)$ составляют по формуле (7);
7) шкалы переменных α_1, α_2, α_3 и α_4 градуируют по их соответствующим уравнениям вида (6) § 3.

Б. Сопряжение Z-номограммы с номограммой из параллельных шкал

Тип решаемого уравнения

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = f_3(\alpha_3) + f_4(\alpha_4).$$

Для графического изображения при помощи номограммы функциональной зависимости вида

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = f_3(\alpha_3) + f_4(\alpha_4) \qquad (8)$$

с четырьмя переменными можно также воспользоваться введением немой шкалы.

Заменим уравнение (8) равносильной ему системой

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = \varphi(\alpha); \qquad (9)$$

$$\varphi(\alpha) = f_3(\alpha_3) + f_4(\alpha_4). \qquad (10)$$

Уравнение (10) имеет вид уравнения (2) § 4 и может быть поэтому представлено при помощи номограммы из трех параллельных шкал по правилам и формулам § 4. Эта номограмма будет иметь вид, изображенный на рис. 62.

Модуль A и ориентирный коэффициент B шкалы $\varphi(\alpha)$ вычисляют по формулам (4) и (5), величину же m по формуле (5) § 4 при $l = l_1$.

Уравнение (9) имеет вид уравнения (2), § 5 и может быть графически изображено при помощи Z-номограммы, приведенной на рис. 65, рассчитываемой по формулам § 5.

Для построения Z-номограммы перепишем уравнение (9) в виде

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{\varphi(\alpha)} = f_2(\alpha_2). \qquad (11)$$

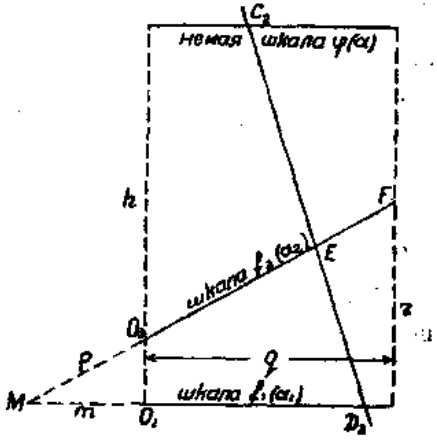

Рис. 65.

Так как уравнение немой шкалы имеет вид

$$y_2 = A\varphi(\alpha) + B,$$

где A и B известны из расчета номограммы для уравнения (10), и так как шкала $\varphi(\alpha)$ заменяет шкалу $f_2(\alpha_2)$ § 5, то сравнение последнего уравнения с вторым из уравнений (3) § 5 дает

$$A_2 = A, \quad n = -B. \qquad (12)$$

Чтобы иметь возможность совместить немые шкалы $\varphi(\alpha)$ обеих номограмм, они должны быть одинаковой длины, поэтому для Z-номограммы принимаем

$$q = s, \qquad (13)$$

где s — длина шкалы $\varphi(\alpha)$ в номограмме из параллельных шкал (рис. 62) и соответствует обозначению h рис. 11 § 4.

В первом из уравнений (3) § 5

$$y_1 = A_1 f_1(\alpha_1) - m$$

модуль A_1 и ориентирный коэффициент $(-m)$ определяют по общим правилам § 3 по пределам изменения переменной α_1.

Задавшись в зависимости от размера чертежа и удобства расположения на нем номограммы величиной h из системы уравнений

$$\frac{p}{m} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} \tag{14}$$

$$p = \frac{lm}{m + n + q}, \tag{15}$$

можно определить l и p (рис. 43).

Тогда на основании уравнения (4) § 5 получим следующее уравнение шкал зависимой переменной α_2:

$$y_3 = \frac{A_1 l f_2(\alpha_2)}{A_1 f_2(\alpha_2) + A} - p. \tag{16}$$

Таким образом, расчет и построение сопряженной Z-номограммы с номограммой из параллельных шкал производится в следующем порядке:

1) номограмма из параллельных шкал, изображенная на рис. 62, строится, как указано в п. 1, 2, 3, в заключении к разделу А этого параграфа;

2) по формулам (12) определяют A_2 и n;

3) по формуле (13) определяют q;

4) A_1 и m вычисляют по формулам (7) § 3;

5) из системы уравнений (14) и (15) определяют l и p, задавшись h;

6) уравнение шкалы зависимой переменной α_2 составляют по формуле (16);

7) шкалы переменных α_1 и α_2 градуируют по их уравнениям.

Вид всей сопряженной номограммы получается в результате совмещения немой шкалы $\varphi(\alpha)$ в номограммах, изображенных на рис. 62 и 65; схема ее показана на рис. 66.

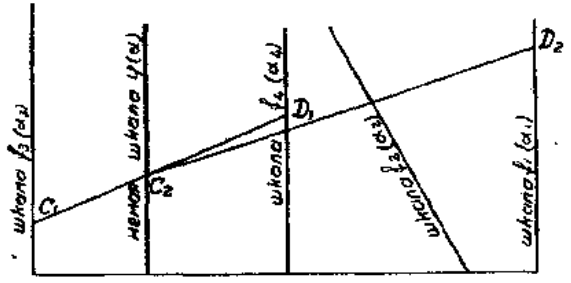

Рис. 66.

В. Сопряжение двух номограмм с криволинейными шкалами посредством прямолинейной немой шкалы

Номограмма для изображения уравнения с четырьмя переменными α_1, α_2, α_3, α_4 из четырех криволинейных шкал и одной криволинейной немой шкалы, схема которой приведена на рис. 32, в общем виде

имеет лишь теоретический интерес, ибо вид функциональной зависимости (2) § 1, представляемый такой номограммой, имеет весьма сложный вид; поэтому практическое построение такой номограммы связано с значительными трудностями, и рассматривать его здесь мы не будем.

Практический интерес представляет её частный вид, когда немая шкала является прямолинейной и равномерной.

Расчет и построение такой номограммы основан на следующих соображениях.

Рассмотрим одновременно две функциональные зависимости вида

$$\begin{vmatrix} \alpha, & 0, & 1 \\ \varphi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_1), & 1 \\ \varphi_2(\alpha_2), & \psi_2(\alpha_2), & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha, & 0, & 1 \\ \varphi_3(\alpha_3), & \psi_3(\alpha_3), & 1 \\ \varphi_4(\alpha_4), & \psi_4(\alpha_4), & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Чтобы придать рассматриваемой номограмме свойство полной приспособляемости, преобразуем эти уравнения тождественно, умножив каждое из них соответственно на определители

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{19}$$

где A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i — произвольные пока постоянные, удовлетворяющие неравенствам (19).

Тогда уравнения (17) и (18) перепишутся так:

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha, & 0, & 1 \\ \varphi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_1), & 1 \\ \varphi_2(\alpha_2), & \psi_2(\alpha_2), & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha, & 0, & 1 \\ \varphi_3(\alpha_3), & \psi_3(\alpha_3), & 1 \\ \varphi_4(\alpha_4), & \psi_4(\alpha_4), & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или, перемножив определители:

$$\begin{vmatrix} A_1\alpha+C_1; & A_2\alpha+C_2; & A_3\alpha+C_3; \\ A_1\varphi_1(\alpha_1)+B_1\psi_1(\alpha_1)+C_1; & A_2\varphi_1(\alpha_1)+B_2\psi_1(\alpha_1)+C_2; & A_3\varphi_1(\alpha_1)+B_3\psi_1(\alpha_1)+C_3 \\ A_1\varphi_2(\alpha_2)+B_1\psi_2(\alpha_2)+C_1; & A_2\varphi_2(\alpha_2)+B_2\psi_2(\alpha_2)+C_2; & A_3\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha+c_1; & a_2\alpha+c_2; & a_3\alpha+c_3; \\ a_1\varphi_3(\alpha_3)+b_1\psi_3(\alpha_3)+c_1; & a_2\varphi_3(\alpha_3)+b_2\psi_3(\alpha_3)+c_2; & a_3\varphi_3(\alpha_3)+b_3\psi_3(\alpha_3)+c_3 \\ a_1\varphi_4(\alpha_4)+b_1\psi_4(\alpha_4)+c_1; & a_2\varphi_4(\alpha_4)+b_2\psi_4(\alpha_4)+c_2; & a_3\varphi_4(\alpha_4)+b_3\psi_4(\alpha_4)+c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Вынеся за знак определителя множителями элементы третьего столбца и сократив уравнения на их произведение, получим:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{A_1\alpha + C_1}{A_3\alpha + C_3}; & \dfrac{A_2\alpha + C_2}{A_3\alpha + C_3}; & 1 \\ \dfrac{A_1\varphi_1(\alpha_1) + B_1\psi_1(\alpha_1) + C_1}{A_3\varphi_1(\alpha_1) + B_3\psi_1(\alpha_1) + C_3}; & \dfrac{A_2\varphi_1(\alpha_1) + B_2\psi_1(\alpha_1) + C_2}{A_3\varphi_1(\alpha_1) + B_3\psi_1(\alpha_1) + C_3}; & 1 \\ \dfrac{A_1\varphi_2(\alpha_2) + B_1\psi_2(\alpha_2) + C_1}{A_3\varphi_2(\alpha_2) + B_3\psi_2(\alpha_2) + C_3}; & \dfrac{A_2\varphi_2(\alpha_2) + B_2\psi_2(\alpha_2) + C_2}{A_3\varphi_2(\alpha_2) + B_3\psi_2(\alpha_2) + C_3}; & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_1\alpha + c_1}{a_3\alpha + c_3}; & \dfrac{a_2\alpha + c_2}{a_3\alpha + c_3}; & 1 \\ \dfrac{a_1\varphi_3(\alpha_3) + b_1\psi_3(\alpha_3) + c_1}{a_3\varphi_3(\alpha_3) + b_3\psi_3(\alpha_3) + c_3}; & \dfrac{a_2\varphi_3(\alpha_3) + b_2\psi_3(\alpha_3) + c_2}{a_3\varphi_3(\alpha_3) + b_3\psi_3(\alpha_3) + c_3}; & 1 \\ \dfrac{a_1\varphi_4(\alpha_4) + b_1\psi_4(\alpha_4) + c_1}{a_3\varphi_4(\alpha_4) + b_3\psi_4(\alpha_4) + c_3}; & \dfrac{a_2\varphi_4(\alpha_4) + b_2\psi_4(\alpha_4) + c_2}{a_3\varphi_4(\alpha_4) + b_3\psi_4(\alpha_4) + c_3}; & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

Из приведенных преобразований следует, что система уравнений (20) и (21) равносильна системе (17) и (18).

Чтобы установить вид функциональной зависимости между переменными α_1, α_2, α_3 и α_4, которая может быть представлена в виде рассматриваемой номограммы, исключим параметр α из системы уравнений (17) и (18), для чего разложим входящие в нее определители по элементам первой строки:

$$\alpha \begin{vmatrix} \psi_1(\alpha_1), & 1 \\ \psi_2(\alpha_2), & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_1) \\ \varphi_2(\alpha_2), & \psi_2(\alpha_2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \begin{vmatrix} \psi_3(\alpha_3), & 1 \\ \psi_4(\alpha_4), & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_3(\alpha_3), & \psi_3(\alpha_3) \\ \varphi_4(\alpha_4), & \psi_4(\alpha_4) \end{vmatrix} = 0$$

откуда

$$\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_1) \\ \varphi_2(\alpha_2), & \psi_2(\alpha_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_1(\alpha_1), & 1 \\ \psi_2(\alpha_2), & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad \alpha = -\frac{\begin{vmatrix} \varphi_3(\alpha_3), & \psi_3(\alpha_3) \\ \varphi_4(\alpha_4), & \psi_4(\alpha_4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_3(\alpha_3), & 1 \\ \psi_4(\alpha_4), & 1 \end{vmatrix}} \qquad (22)$$

Поэтому в результате исключения α из системы уравнений (17) и (18) получим следующий вид искомой функциональной зависимости между переменными α_1, α_2, α_3 и α_4:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_1) \\ \varphi_2(\alpha_2), & \psi_2(\alpha_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_3(\alpha_3), & 1 \\ \psi_4(\alpha_4), & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_3(\alpha_3), & \psi_3(\alpha_3) \\ \varphi_4(\alpha_4), & \psi_4(\alpha_4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(\alpha_1), & 1 \\ \psi_2(\alpha_2), & 1 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

Из уравнений (17) и (18) следует, что уравнения вполне приспособляемых криволинейных шкал переменных α_1, α_2, α_3 и α_4 будут иметь следующий вид, как это следует из формул (4) и (6) — (8): уравнения шкалы переменной α_1:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_1\varphi_1(\alpha_1) + B_1\psi_1(\alpha_1) + C_1}{A_3\varphi_1(\alpha_1) + B_3\psi_1(\alpha_1) + C_3} \\ y_1 &= \frac{A_2\varphi_1(\alpha_1) + B_2\psi_1(\alpha_1) + C_2}{A_3\varphi_1(\alpha_1) + B_3\psi_1(\alpha_1) + C_3} \end{aligned}\right| \qquad (24)$$

уравнения шкалы переменной α_2:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{A_1\varphi_2(\alpha_2)+B_1\psi_2(\alpha_2)+C_1}{A_3\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3} \\ y_2 &= \frac{A_2\varphi_2(\alpha_2)+B_2\psi_2(\alpha_2)+C_2}{A_3\varphi_2(\alpha_2)+B_3\psi_2(\alpha_2)+C_3} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

уравнения шкалы переменной α_3:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{a_1\varphi_3(\alpha_3)+b_1\psi_3(\alpha_3)+c_1}{a_3\varphi_3(\alpha_3)+b_3\psi_3(\alpha_3)+c_3} \\ y_3 &= \frac{a_2\varphi_3(\alpha_3)+b_2\psi_3(\alpha_3)+c_2}{a_3\varphi_3(\alpha_3)+b_3\psi_3(\alpha_3)+c_3} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

уравнения шкалы переменной α_4:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= \frac{a_1\varphi_4(\alpha_4)+b_1\psi_4(\alpha_4)+c_1}{a_3\varphi_4(\alpha_4)+b_3\psi_4(\alpha_4)+c_3} \\ y_4 &= \frac{a_2\varphi_4(\alpha_4)+b_2\psi_4(\alpha_4)+c_2}{a_3\varphi_4(\alpha_4)+b_3\psi_4(\alpha_4)+c_3} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Наконец, на основании уравнений (4) § 13 и (6), (7) и (8) заключаем, что уравнения немой шкалы для переменной α будут:
из уравнения (20)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A_1\alpha+C_1}{A_3\alpha+C_3} \\ y &= \frac{A_2\alpha+C_2}{A_3\alpha+C_3} \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

из уравнения (21)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a_1\alpha+c_1}{a_3\alpha+c_3} \\ y &= \frac{a_2\alpha+c_2}{a_3\alpha+c_3} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Но шкала для переменной α должна быть общей, поэтому ее уравнения (29) и (28) должны совпасть, для чего достаточно соблюдения следующих шести условий:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad A_3 = a_3; \quad C_1 = c_1, \quad C_2 = c_2, \quad C_3 = c_3. \qquad (30)$$

В уравнения (24) — (27) шкал для переменных α_1, α_2, α_3 и α_4 входит всего восемнадцать постоянных

$$A_i,\ B_i,\ C_i,\ a_i,\ b_i,\ c_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

которые, кроме шести условий (30), можно подчинить дополнительно еще двенадцати условиям.

Эти последние условия определяются тем, чтобы номограмма была приспособляемой, т. е. чтобы имели место восемь уравнений (9) и (10) § 13 для шкал переменных α_1, α_2 и четыре аналогичных уравнения для шкалы переменной α_3.

Нетрудно убедиться в том, что уравнения (28) или, что то же, уравнения (29) определяют прямую линию, для этого достаточно

исключить параметр α из одной из этих систем, например из второй.

Перепишем первое из уравнений этой системы в виде

$$a_3\alpha x + c_3 x = a_1\alpha + c_1,$$

откуда

$$\alpha = \frac{c_1 - c_3 x}{a_3 x - a_1}.$$

Подставив это значение α во второе уравнение системы (29), получим

$$y = \frac{a_2(c_1 - c_3 x) + c_2(a_3 x - a_1)}{a_3(c_1 - c_3 x) + c_3(a_3 x - a_1)} = \frac{(c_2 a_3 - c_3 a_2)x + (c_1 a_2 - c_2 a_1)}{c_1 a_3 - c_3 a_1}$$

или окончательно

$$y = \frac{a_2 c_3 - a_3 c_2}{a_1 c_3 - a_3 c_1} x + \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 c_3 - a_3 c_1}, \qquad (31)$$

т. е. уравнение прямой линии.

Расчет и построение рассмотренной номограммы производят в следующем порядке.

1. По заданным пределам изменения переменных α_1, α_2, α_3 и координатам крайних точек шкал для этих переменных, которыми задаемся по условиям расположения номограммы из двенадцати[1]) уравнений вида (9) и (10) § 13 с присоединением к ним шести условий (30), определяем восемнадцать постоянных A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i.

2. Найденные значения последних постоянных подставляем в уравнения (24)—(27), после чего становятся известными параметрические уравнения шкал переменных α_1, α_2, α_3 и α_4.

3. Построение и градуировка шкал переменных α_1, α_2, α_3 и α_4 производятся на основании последних параметрических уравнений по правилам § 7.

4. Значения постоянных a_1, a_2, a_3, c_1, c_2 и c_3 подставляются в уравнение (31) прямолинейной немой шкалы, которая и вычерчивается по этому уравнению и, как немая шкала, не градуируется.

5. Пользование построенной таким образом номограммой пояснено в п. 3 § 2 и на рис. 32, где в рассмотренном случае немая шкала AB есть прямая линия.

§ 15. Номограммы с бинарным полем и двумя параллельными шкалами

Тип решаемого уравнения

$$f_1(\alpha_1) f_{34}(\alpha_3\alpha_4) + f_2(\alpha_2) + \varphi_{34}(\alpha_3\alpha_4)\psi_{34}(\alpha_3\alpha_4) = 0.$$

Обоснование бинарного поля проще всего получить из обобщения понятия о криволинейной шкале и соответственных формул § 12.

Пусть задано уравнение от четырех переменных: α_1, α_2, α_3 и α_4, аналогичное уравнению (2) § 12, но функции f_3, φ_3 и ψ_3 зависят от двух переменных α_3 и α_4; такое уравнение можно написать в виде

$$f_1(\alpha_1) f_{34}(\alpha_3\alpha_4) + f_2(\alpha_2) + \varphi_{34}(\alpha_3\alpha_4)\psi_{34}(\alpha_3\alpha_4) = 0, \qquad (1)$$

[1]) К уравнениям (9) и (10) § 13 следует добавить четыре аналогичных со значками i для переменных.

где значки 3 и 4 при f, φ и ψ означают, что эти функции зависят каждая от тех же двух переменных: α_3 и α_4.

Чтобы для такого уравнения построить номограмму из выравненных точек с двумя прямолинейными и одной криволинейной шкалой, подобную описанной в § 12, надо рассуждать совершенно аналогично сказанному в этом параграфе, и для вполне приспособленной номограммы указанного типа получим аналогично уравнениям (5) — (8) § 12 следующие формулы для расчета всех трех шкал:

$$y_1 = A_1 f_1(\alpha_1) + B_1; \tag{2}$$

$$y_2 = A_2 f_2(\alpha_2) + B_2; \tag{3}$$

$$x_3 = \frac{l}{lA_3 f_{34}(\alpha_3, \alpha_4) + 1}; \tag{4}$$

$$y_3 = -l\,\frac{A_2 \varphi_{34}(\alpha_3, \alpha_4)\,\psi_{34}(\alpha_3, \alpha_4) - B_1 A_3 f_{34}(\alpha_3, \alpha_4) - B_2}{lA_3 f_{34}(\alpha_3, \alpha_4) + 1}. \tag{5}$$

Исключив из (4) и (5) одну из переменных, например α_4, получим уравнение криволинейной шкалы

$$\Phi_1(x_3, y_3, \alpha_3) = 0, \tag{6}$$

где переменная α_3 играет роль параметра, определяющего размер и положение кривой $\Phi_1(x_3, y_3, \alpha_3) = 0$.

Давая величине α_3 ряд последовательных частных значений:

$$\alpha_3 = C_1, \quad \alpha_3 = C_2, \ldots, \quad \alpha_3 = C_3,$$

получим семейство кривых, из которых каждая отвечает одному определенному значению третьей переменной α_3 (рис. 67). Очевидно, переменная α_3 играет здесь роль параметра семейства кривых (1).

Подобным же образом, если из уравнений (14) и (5) исключить букву α_3, то получим уравнение

$$\Phi_2(x_3, y_3, \alpha_4) = 0, \tag{7}$$

которое следует рассматривать как семейство других кривых, определяемых переменным параметром α_4. Давая величине α_4 ряд последовательных значений:

$$\alpha_4 = C_1', \quad \alpha_4 = C_2', \quad \alpha_4 = C_3', \ldots,$$

получим ряд кривых, из которых каждая соответствует определенному значению переменной α_4, входящей в уравнение (7).

Два семейства кривых:

$$\Phi_1(x, y, \alpha_3) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi_2(x, y, \alpha_4) = 0$$

образуют на координатной плоскости XOY *бинарное поле* (рис. 67), которое так называют потому, что каждой точке плоскости соответствуют две указанные кривые линии, проходящие через эту точку, и обратно, каждым двум частным значениям $\alpha_3 = C_i$ и $\alpha_4 = C_i'$ соответствует одна точка M плоскости.

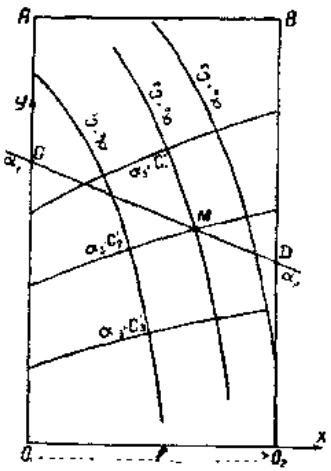

Рис. 67.

Очевидно, что с точки зрения аналитической геометрии указанные кривые и соответствующие им параметры $\alpha_3 = C_i$ и $\alpha_4 = C_i'$ следует рассматривать как криволинейные координаты точек плоскости.

Таким образом, уравнение, содержащее четыре переменные и которое можно привести к виду (1), можно решать с помощью номограммы с двумя параллельными шкалами и бинарным полем, причем на параллельных шкалах строят уравнения $f_1(\alpha_1)$ и $f_2(\alpha_2)$, зависящие каждое от одной переменной, а бинарное поле соответствует тем двум переменным α_3 и α_4, которые входят в заданное уравнение (1) вместе.

При построении номограммы, вполне приспособленной к заданным размерам чертежа, следует пользоваться уравнениями (2) — (5).

§ 16. Номограмма Вейра

Номограмма с бинарным полем и двумя параллельными шкалами, предназначенная для решения уравнения котангенсов или уравнения четырех рядом лежащих элементов сферической тригонометрии, не особенно удобна, и главным образом она не пригодна для определения углов, близких к 0° или 180°.

Между тем, частная форма этой номограммы, именно та, у которой вторая параллельная шкала удалена в бесконечность, имеет большое практическое значение и даже бо́льшую общность, чем первая.

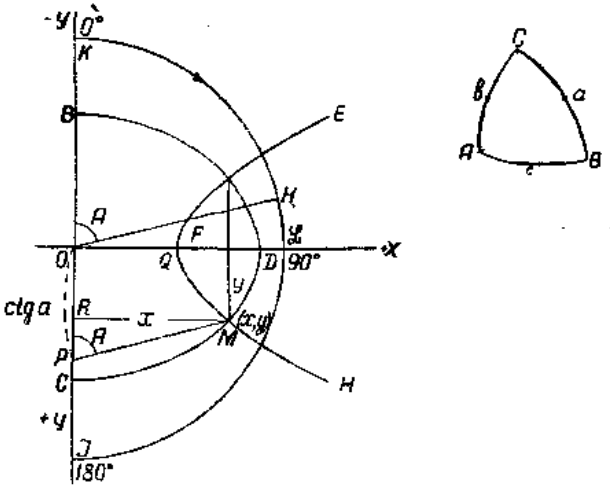

Рис. 68.

Такая частная форма номограммы, известная под названием номограммы Вейра, предназначена для решения уравнения котангенсов, которое применительно к сферическому треугольнику ABC (рис. 68) имеет, как известно, такой вид:

$$\operatorname{ctg} A \sin C = \operatorname{ctg} a \sin b - \cos b \cos C,$$

которое напишем в таком виде

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg} a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C} = \frac{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b \cos C}{\operatorname{cosec} b \sin C}. \qquad (1)$$

Расположим оси координат, как показано на рис. 68, и нанесем точку M по координатам

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{cosec} b \sin C \\ y &= \operatorname{ctg} b \cos C \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а на оси y отметим точку P, ордината которой $OP = \operatorname{ctg} a$. Тогда

$$PR = \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b \cos C$$
$$RM = \operatorname{cosec} b \sin C,$$

а поэтому

$$\operatorname{ctg} OPM = \operatorname{ctg} A = \frac{PR}{RM} = \frac{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b \cos C}{\operatorname{cosec} b \sin C}.$$

Если описать окружность KLI произвольным радиусом, приняв начало координат за центр, и градуировать окружность так, чтобы 0° соответствовал отрицательному направлению оси Y, а 180° — положительному направлению, то, проведя через центр O прямую $OH \parallel PM$ по делению окружности прочитаем искомый угол A.

Вместо того чтобы наносить точку M по координатам ее x и y, удобнее поступить таким образом.

Давая переменной C ряд последовательных значений при постоянном b, найдем ряд точек, которые определят половину эллипса BDC, который проходит через точку M. В самом деле, исключая из уравнений (2) величину O, получим

$$\frac{x^2}{\operatorname{cosec}^2 b} + \frac{y^2}{\operatorname{ctg}^2 b} = 1, \tag{3}$$

которое, действительно, представляет упомянутый эллипс, полуоси которого

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \operatorname{cosec} b \\ \beta_1 &= \operatorname{ctg} b \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Давая переменной b ряд последовательных значений при постоянном C, найдем ряд точек, которые определяют половину гиперболы EQH, проходящую через точку M. В самом деле, исключая из уравнений (2) величину b, получим:

$$\frac{x^2}{\sin^2 C} - \frac{y^2}{\cos^2 C} = 1, \tag{5}$$

что, действительно, представляет гиперболу, полуоси которой

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \sin C \\ \beta_2 &= \cos C \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

У эллипса BDC эксцентриситет e_1 равен

$$e_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{\alpha_1} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 b - \operatorname{ctg}^2 b}}{\operatorname{cosec} b} = \sin b, \tag{7}$$

а потому расстояние от начала координат O до фокуса F равно

$$OF = \alpha_1 e_1 = 1.$$

У гиперболы EQH расстояние от начала координат (центра) O до фокуса F равно

$$OF = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \sqrt{\sin^2 C + \cos^2 C} = 1.$$

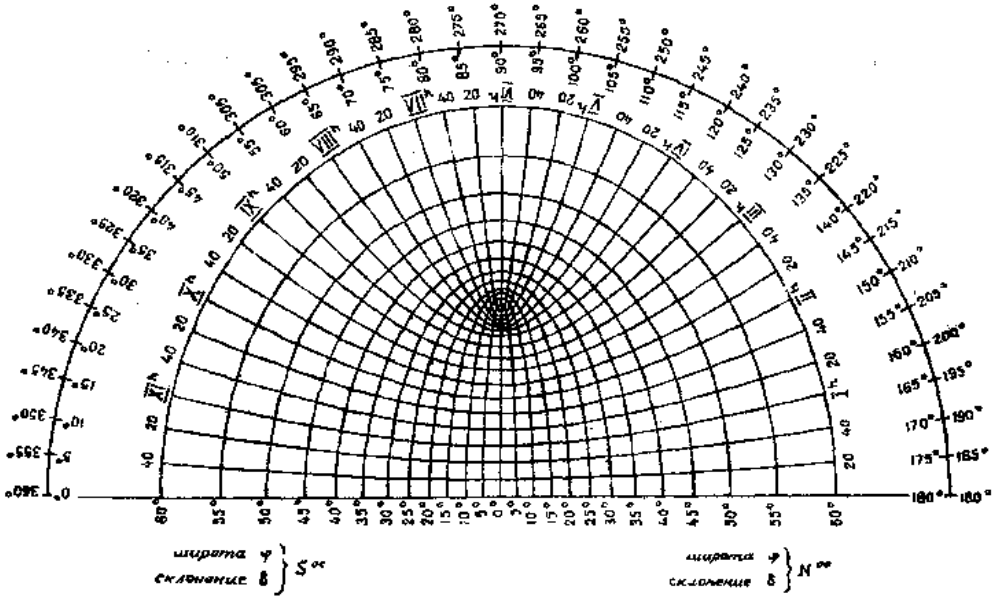

Рис. 69.

Таким образом, мы видим, что каждый эллипс и гипербола, проходящие через точку M, имеют общий фокус в точке F. Так как это заключение будет справедливо для любых двух кривых, то легко понять, что для разных значений b и C получаем семейство софокусных эллипсов и гипербол.

В аналитической геометрии доказано, что семейства софокусных эллипсов и гипербол пересекаются под прямыми углами.

Каждый эллипс соответствует значениям переменной b, изменяющимся от 0 до π. Положительные значения $\operatorname{ctg} b$ соответствуют нижней половине рис. 68, а отрицательным соответствует верхняя половина.

Каждая гипербола соответствует значениям переменной C, изменяющейся в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и от $\frac{\pi}{2}$ до π, так как $\sin(\pi - C) = \sin C$.

Таким образом, вместо координат x и y положение точки M на плоскости определяется пересечением эллипса, соответствующего данной величине b, и гиперболы, соответствующей заданной величине C. Поэтому софокусные эллипсы и гиперболы представляют собой действительно систему так называемых криволинейных координат, с помощью которых, как видно из сказанного, положение точки на плоскости определяется так же, как и обыкновенными прямолинейными координатами.

Описанная номограмма легко может быть применена для определения азимута светила по заданным широте φ наблюдателя, склонению δ светила и по часовому углу t. Для этого в предыдущих формулах надо положить:

$$a = 90° - \delta, \quad b = 90° - \varphi, \quad C = t, \quad A = \text{азимуту},$$

и формула (1) обращается в хорошо знакомую формулу

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi\cos t}{\sec\varphi\sin t}. \qquad (8)$$

Общий вид номограммы VIII показан на рис. 69.

Если на окружности круга нанести две системы делений: одну от 0° до 180° по часовой стрелке, а другую от 180° до 360° против часовой стрелки, и считать азимуты геодезически как курсы, то деления от 0° до 180° будут соответствовать положению светила на восточной половине сферы, а деления от 180° до 360° соответствуют положению светила на западной половине сферы.

Такая система деления окружности избавляет от необходимости переводить полученные азимуты в геодезический счет, что неизбежно при употреблении всяких азимутальных таблиц.

Заметим, что номограмму Вейра можно рассматривать как такую картографическую проекцию, в которой изоазимуты изображаются прямыми линиями.

Редактор *В. А. Черемисов*
Техн. редактор *Л. С. Ручкина*
* * *
Сдано в набор 31/VII 1951 г.
Подписано в печать 7/XII 1951 г.
Объем 9 печатных листов
№ ГМ-288386. Изд. № 51. Зак. 2359.
* * *
Типография ГВМС